Министерство просвещения Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Уральский государственный педагогический университет»
Институт математики, физики, информатики и технологий
Кафедра высшей математики и методики обучения математике

# РЕАЛИЗАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИРОВАННОГО ПОДХОДА В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ СТЕРИОМЕТРИИ

**Выпускная квалификационнаяработа**

Направление подготовки «44.03.01 – Педагогическое образование.
Профиль «Математика»

Работа допущена к защите:

Заведующий кафедрой

______________________________

дата подпись

Исполнитель:
Аванесян А. Э.,
студентка группы МАТ-1601z

________________________________

подпись

Научныйруководитель:
Блинова Т.Л., к.пед.н., доцент кафедры высшей математики и методики обучения математике

_______________________________

подпись

Екатеринбург 2021

# АННОТАЦИЯ

Выпускная квалификационная работа состоит из 66 страниц, в том числе 1 таблицы. Список используемой литературы включает 45 наименований.

Ключевые слова: дифференциация, дифференцированное обучение.

В первой главе рассмотрены особенности организации дифференцированного подхода в процессе обучения математике. Выведены основные понятия ВКР и непосредственно требования к организации учебного процесса, направленного на организацию дифференцированного подхода.

Во второй главе приводится информация об организация дифференцированного подхода в процессе изучения стереометрии. Так же в этой главе приведена совокупность задач по теме «Объёмы геометрических тел».

В основу ВКР положены материалы, собранные в период прохождения учебных и производственных практик, а также фондовые материалы.

ОГЛАВЛЕНИЕ

## Введение

Важнейшим вектором нового Федерального государственного образовательного стандарта общего и среднего образования является повышение качества воспитания и образования на основе системно-деятельностного подхода в обучении. В системе образования современного периода учащийся рассматривается как субъект воспитательного и учебного процесса, поэтому необходимо максимально обеспечить развитие всех обучающихся, учитывая их наклонности, особенности, познавательные потребности. Это предопределяет повышение интереса педагогов к проблеме дифференцированного обучения, которая рассматривается в трудах О.Б. Епишевой, В.М. Монахова, И.М. Осмоловской, др.

Ключевая задача дифференцированной организации учебной деятельности заключается в раскрытии индивидуальности, оказании помощи ей в развитии, проявлении, обретении избирательности и устойчивости к воздействиям и трансформациям в обществе. Дифференцированное обучение сводится к максимальному развитию задатков и способностей каждого учащегося. Важно, что при этом общий уровень образования в средней школе должен быть одинаковым для всех.

Разные подходы к дифференциации в процессе обучения математикерассматривают О.В. Баринова, В.А. Гусев, Г.В. Дорофеев. Ученые заостряют внимание на разработке целей современного дифференцированного обучения, установлению требований для реализации различных видов дифференциации, формированию требований для критериев выделения уровней и поиску средств реализации уровневой дифференциации обучения математике.

Дифференцированное обучение дает возможность организовать учебный процесс, учитывая индивидуальную специфику обучающихся, обеспечивает качественное усвоение учащимися учебной программы, оказывает помощь в решении проблемы перегрузки школьников. Помимо этого, дифференцированное обучение способствует созданию комфортного психологического климата в школьном учреждении; повысить социальную защищенность обучающихся. Дифференцированное обучение создает наилучшие условия, в которых ученик получает возможность приобрести глубокие знания по изучаемым предметам, испытывает наибольший комфорт и радость при обучении, находит свою нишу и поле деятельности. Дифференцированное обучение ведет к повышению качества знаний и успеваемости учащихся.

Объект исследования – процесс обучения стереометрии в 10-11 классах.

Предмет исследования – средствареализации дифференцированного подхода в процессе обучения стереометрии.

Цель исследования – разработать систему заданий, направленных на реализацию дифференцированного подхода в процессе изучения стереометрии.

Задачи исследования:

1) определить понятие дифференциации, виды дифференциации;

2) изучить требования к организации учебного процесса, направленного на организацию дифференцированного подхода;

3) провести логико-математический анализ школьного курса стереометрии;

4) определить и описать требования к организации учебного процесса, направленного на организацию дифференцированного подхода при обучении стереометрии;

5) разработать совокупностьзадач по теме «Объемы геометрических тел».

Структура исследования. Работа включает введение, две главы, заключение, список использованной литературы.

# Глава 1. Особенности организации дифференцированного подхода в процессе обучения математике

## 1.1. Определение понятия дифференциации, виды дифференциации

Деятельность человека − специфический вид его активности. Посредством деятельности человек преобразует окружающий мир, условия своей жизни. В процессе деятельности человек совершенствует себя и природу, создает предметы духовной и материальной культуры.

Дифференцированный подход в рамках общего среднего образования имеет особое значение. Этот вид деятельности осуществляет преобразующую и познавательную функции. Он представляет собой форму активности школьников в отношении окружающей действительности, способ самостоятельного получения новых знаний и опыта, двигатель прогресса, источник творческого и интеллектуального отношения к жизни, фундамент созидания творческого аспекта духовных и материальных продуктов[26].

В Федеральных государственных образовательных стандартах основного общего и среднего (полного) общего образования установлены цели и задачи, которые в настоящее время обозначены перед системой образования [2].

Первостепенная установка образования вместо простой передачи умений, навыков и знаний от педагога к учащемуся, состоит в развитии способности школьников самостоятельно обозначать учебные цели, моделировать вероятные пути их воплощения, самостоятельно находить необходимые сведения, контролировать и давать оценку своим достижениям. Так происходит формирование умения учиться.

В качестве методологического фундамента Стандарта выступает системно-деятельностный подход, обеспечивающий:

- формирование готовности учащихся к непрерывному образованию и саморазвитию;
- активную учебно-познавательную работу учащихся [2].

Помимо этого, стандарты предусматривают становление компетенций учащихся в области применения коммуникационных и информационных технологий, проектной и учебно-исследовательской деятельности.

В этом плане значительные возможности предоставляет дифференцированный способ обучения. Это один из методов личностно-ориентированного обучения, инструмент осуществления самостоятельной работы учащихся в ходе решения задач учебного проекта.

Таким образом, в Федеральном Государственном стандарте основного общего образования четко обозначена цель развития творческих и интеллектуальных способностей, обучающихся посредством осуществления дифференциации их работы в обучающем процессе. Также учащиеся могут самостоятельно при помощи эксперимента получать новые знания, приобщаться к культуре исследования, постигать навыки анализа и обобщения, построения теоретического фундамента и выхода в практику.

Личностно-ориентированное обучение в системе образования современного периода является одним из приоритетных направлений. Под моделью личностно-ориентированного обучениянеобходимо понимать определенным образом спроектированную организациюпроцесса обучения, которая создает условия для развития у учащихсяспособностей к самообразованию, самовоспитанию,самоопределению, самостоятельности и самореализации;дающая возможность наиболее полно проявлять и реализовывать потенциал учащегося в соответствии с его подготовкой, способностями ипсихофизиологической спецификой [18].

Целенаправленная активность учащихся имеет важное воспитательное и познавательное значение в исследовательской работе и учебном процессе. Она выступает в качестве стимула дальнейшего поступательного развития, способствует эффективному саморазвитию, личностному и профессиональному самоопределению, становление индивидуальности человека в плане творчества.

Выделим ключевые составляющие продуктивных, развивающих видов деятельности школьников [7]:

- коммуникативная (цель и содержание работы заключается в общении с другим человеком, свободное от цели предмета);
- трудовая (производительный и общественно-полезный труд, самообслуживание);
- познавательная (расширение кругозора, становление потребности в образовании, творческом развитии, овладении научными знаниями);
- художественная (развитие мировосприятия с опорой на эстетику, потребность в созерцании прекрасного, способность к художественному мышлению);
- спортивная (основа на здоровый образ жизни, формирование выносливости и силы);
- общественная (становление гражданской позиции, приобщение к интенсивному положительному преобразованию мира);
- исследовательская (глубокое и детальное рассмотрение конкретного явления, проблемы на уровне теории, дальнейшей проверки на практике обозначенной гипотезы).

А.Г. Асмолов указывает на то, что формирование образовательного процесса осуществляется в зависимости от типа деятельности, имеющей смысл для учащегося. В ходе обучения с использованием способа дифференциации каждый учащийся выходит на собственную ступень развития, опираясь на свой индивидуальный ритм работы. Специфическое применение знаний в ходе решения разных проблем способствует более осознанному и глубокому их усвоению. Ценность работы с использованием дифференцированного способа определяется не столько внешними критериями и формой, сколько внутренним компонентом, который раскрывает творческий потенциал развития личности учащегося во время урока [7, с. 52].

Дифференциация обучения рассматривалась в трудах философов-гуманистов и педагогов. Я.А. Коменский, Ж.-Ж. Руссоуказывали на важность в ходе образования уделятьвнимание развитию индивидуальности ребенка, его природных способностей,опираясь на знания индивидуальных интересов, потребностей, мотивации и возможностей. Я.А. Коменский сформулировал принцип учетаиндивидуальной и возрастной специфики [44].

Необходимо принимать во внимание индивидуальную специфику обучающихся входе обучения, поскольку ученики по разным показателям имеют существенные отличия друг от друга. Данный постулат был отражен в педагогической концепции под названием принцип дифференцированного подхода.

В дифференцированном подходе присутствуют компоненты,имеющие тесную связь друг с другом. Также они представляют цикл, который повторяется периодически на новом уровне[27]:

- систематическое изучение каждого ученика;
- постановка ближайших педагогических задач в работе с каждым учеником;
- привлечение продуктивных механизмов и инструментов индивидуального подхода к ученику;
- фиксация и изучение полученных результатов;
- постановка новых педагогических задач.

Осуществление принципа дифференцированного подхода предполагаеторганизацию учебного процесса, учитывая индивидуальную специфику обучающихся, дающую возможность создать наиболее благоприятные условия для реализациипотенциальных возможностей каждого учащегося. Вектор дифференциации обучения ставит задачу по преодолению противоречий между уровнемучебного функционирования, который обозначают программы и реальным потенциалом каждого ученика. Дифференциация выступает в качестве важнейшего фактора воплощения различных установок обучения становления индивидуальности [30].

Используя понятие «дифференциация обучения»необходимо иметь в виду, что в процессе его практического изучения предполагается не абсолютная, а относительная дифференциация. В школьной практике в условиях классно-урочной системы обучения дифференциация является всегда относительной по ряду причин:

1) принимается во внимание, как правило, индивидуальная специфика не каждого учащегося, а группы учащихся, которые имеют приблизительно похожие особенности;

2) принимаются во внимание только известные особенности, такие, которые представляют значимость в аспекте учения (к примеру, умственные способности общей направленности); одновременно может выступать ряд особенностей, принятие которых в конкретной форме индивидуализации невозможно или не является необходимостью (к примеру, разные признаки и свойства темперамента, характера и т.д.);

3) в некоторых случаях осуществляется учет некоторых признаков или свойств только тогда, если это представляет значимость для данного школьника (к примеру, проблемы здоровья, способности в определенной сфере);

4) дифференцированное обучение воплощается не во всем объеме учебного функционирования, а только фрагментарно или в отдельном конкретном виде учебной работы и объединяется с неиндивидуализированным видом деятельности.

В практической деятельности были использованы многочисленные вариации с целью индивидуализации учебного функционирования и за рубежом, и в России. Дифференциация обучения является одной из вариаций [39].

Само слово «дифференциация» происходит от латинского «difference» и в переводе означаетрасслоение, разделение целого на разные компоненты, ступени или формы[34, с.82].

Новой идея дифференциации обучения не является. Так, А.В.Луначарский пытался внедрить идеи дифференциации обучения в форме разграниченияединой школы на «факультеты», которые учитывали бы разные склонности и интересы [44].

Г.К. Селевкотак определяет дифференцированное обучение:

1) форма организации учебного процесса, при которой педагог работает с группой учащихся, сформированной с учетом наличия у них каких-либо существенных для учебного функционирования качеств общего характера;

2) компонент общей дидактической системы, обеспечивающей специализацию учебного функционирования для разных групп учащихся [37, с. 64].

В.М. Кузьмина определяет дифференцированное обучение каксоздание наиболее благоприятных условий для развития личности учащегося как индивидуальности. В качестве отправного пункта в формировании данного обучениявыступает раскрытие индивидуального потенциала каждого школьника[27, с. 12].

И.Э. Унт понимает под дифференциацией «учетиндивидуальных особенностей учащихся в той форме, когда учащиесягруппируются на основании каких-либо особенностей для отдельногообучения, обычно обучение в этом случае происходит по несколькоразличным учебным планам и программам»[42, с. 10].

Определение, предложенное И.М. Осмоловской представляется наиболее полным:«дифференцированное обучение – этоорганизация учебного процесса, при которой учитываются индивидуально-психологические особенности личности, формируются группы учащихся с различающимися содержанием образования, методами обучения» [33, с.45].

В рамках настоящего исследования возьмем за основу определение дифференциации И.М. Осмоловской.

Дифференцированный подход – это важнейший принцип воспитанияи обучения. Его реализация предполагает частное, временное изменениеближайших задач и отдельных сторон содержания учебно-воспитательнойработы, постоянное варьирование ее методов и организационных форм сучётом общего и особенно в личности каждого ученика.

Применениедифференцированного подхода в учебном процессе означает действенноевнимание к каждому ученику, его творческой индивидуальности в условияхклассно-урочной системы обучения по обязательным учебным программам,предполагает разумное сочетание фронтальных, групповых ииндивидуальных занятий для повышения качества обучения и развитиякаждого ученика [33].

В дидактике различают дифференциацию по способностям (пообщим способностям, по частным способностям, по неспособностям); попроектируемой профессии; по интересам [44]. Дифференциация по общимспособностям происходит на основании учета общего уровня обученности,развития учащихся, отдельных особенностей психического развития –памяти, мышления, познавательной деятельности. Остальныеиндивидуальные различия учащихся учитываются при организациивнутренней дифференциации на уроке за счет соответствующих технологийобучения.

Основными целями организации дифференцированного обученияявляется:

- обучение каждого на уровне его возможностей и способностей;
- приспособление (адаптация) обучения к особенностям различных групп учащихся.

Рассмотрим известные формы организации внутриклассснойдифференциации.

Значительные возможности для внутриклассной дифференциациипредставляет групповая работа. Под групповой работой понимается «…такое построение работы, где класс делитсядля выполнения того или иного задания на группы по 3-8 человек. Заданиедается группе, а не отдельному ученику» [24, с. 38].

В малой группеучащийся находится в более благоприятных условиях, чем прифронтальной работе всем классом, в отношении возможностей действоватьв соответствии со своей индивидуальностью. В беседе внутри малойгруппы он может высказать своё мнение, активнее участвовать в решенииучебных задач в соответствии со своими интересами и способностями.

Особенно благоприятные возможности для индивидуализациипредставляют группы, которые структурированы определенным образом.

Следующая форма внутриклассной дифференциации – этодифференцированная самостоятельная работа. Дифференциация здесьосуществляется таким способом, что учащимся даются задания, которыеварьируются в зависимости от их индивидуальных особенностей, а такжепутем группировки учащихся внутри класса по различным признакам [8].

При осуществлении дифференцированного обученияважным является реализация всех обозначенных форм организациивнутриклассной дифференциации (групповая работа, дифференциацияпомощи ученикам в учебе, дифференцированная самостоятельная работа).

Таким образом, ключевым моментом дифференциации является разделениеучащихся на группы.

Учесть индивидуальные особенности учащихся возможно только приформировании групп педагогом, с обязательным использованиемдиагностических методик.Обучаясь в одном классе, по одной программе и учебнику,школьники могут усваивать материал на различных уровнях.

Определяющим при этом является уровень обязательной подготовки. Егодостижение свидетельствует о выполнении учеником минимальнонеобходимых требований к усвоению содержания. На его основеформируются более высокие уровни овладения материалом. В последнеевремя этот вид дифференциации стали называть уровневойдифференциацией (кроме уровневой дифференциации выделяют еще ипрофильную дифференциацию)[25].

Е.С. Полат под уровневой дифференциацией понимает такую организацию учебно-воспитательного процесса, при которой каждыйученик имеет возможность овладеть учебным материалом на разныхуровнях, но не ниже базового, в зависимости от желания, способностейииндивидуальных особенностей личности. При этом критериями оценкиявляются усилия ученика по овладению материалом и творческому егоприменению [32, с. 76].

Реализация внутриклассной уровневой дифференциациипредполагает учет таких особенностей учащихся, которые влияют на ихучебную деятельность и от которых зависят результаты учения. Таковымимогут быть различные физические и психические качества и состояниияличности: особенности всех познавательных процессов и памяти, свойстванервной системы, черты характера и воли, мотивация, способности,одаренность и т.д.Рассмотрение и учет этих особенностей и является однойиз центральных проблем индивидуализации и дифференциации обучения[11].

И.Э. Унт к особенностям учащихся, которые необходимо учитыватьпри дифференциации, относит:обучаемость, т.е. общие умственныеспособности (в том числе креативность), а также специальныеспособности;учебные умения; обученность, которая состоит как из программных, так ивнепрограммных знаний, умений инавыков;познавательные интересы [42].Кроме этого, при дифференциации И.Э. Унт предлагает учитывать еще исостояние здоровья школьников.

Выделим особенности учащихся, объединенные в блоки, используемые вкачестве основания дифференциации обучения стереометрии:

1) биологические особенности (зрение, слух, общее состояние здоровья и др.);

2) интеллектуальные особенности (внимание, память, мышление и др.);

3) навыки учебного труда (соблюдение режима дня, темп чтения, письма, вычисления и др.);

4) основные отношения (отношение к учению, к учителю, к коллективу и др.);

5) бытовые явления (материально-бытовые условия, влияние семьи и др.);

6) образовательная подготовленность учащихся;

7) некоторые морально-волевые качества (настойчивость в учении, стремление преодолевать трудности в учебе, прилежание, сознательность учебной дисциплины, активность в общественной работе и др.).

Необходимо заключить, что дифференцированный подход в обучении – значимый принципвоспитания и обучения. Он означает действенное внимание к каждому учащемуся,его творческой индивидуальности в условиях классно-урочной системы обучения в соответствии с обязательными учебными программами, предполагает сочетание индивидуальных, групповых и фронтальных заданий для повышения качества обучения иразвития каждого учащегося.

Таким образом, представленныеособенности учащихсядолжны учитываться при реализации дифференцированного обучения, какодного из способов осуществления модели личностно-ориентированногообучения. Внутриклассная(уровневая) дифференциация обучения возможнадля многих учебных предметов.

## 1.2. Требования к организации учебного процесса, направленного на организацию дифференцированного подхода

Дифференцированное обучение − подход, при котором осуществляется максимальный учет запросов и возможностей каждого учащегося или отдельных групп обучающихся. Дифференциация обучения на уроке происходит посредством изменения содержания, регулирование сложности и длительности выполнения отдельных заданий, средств методической поддержки учеников в соответствии с их возможностями и подготовленностью к обучению.

Главной целью дифференцированного обучения является определение для каждого обучающегося (группы обучающихся) наиболее эффективного и целесообразного вида учебной деятельности, формы работы на уроке и типа заданий на дом. При этом нужно исходить из его индивидуальных особенностей (уровень подготовки, развитие мышления, познавательного интереса к предмету и т.д.)[40].

В использовании технологии дифференцированного обучения важно сочетание следующих этапов:

- изучение индивидуальных особенностей всех обучающихся, которых чаще всего по уровню обучаемости и познавательных возможностей условно можно разделить на три группы.

Группа с высоким уровнем развития познавательных интересов(свободно усваивают изучаемый материал, выделяют существенное, закономерное, в частном видят общее, способны самостоятельно развивать раскрытые на уроке положения, легко переносят знания в новые ситуации, достигают высокого уровня знаний за самое короткое время).

Группа со средним уровнем развития познавательных интересов(усваивают учебный материал после тренировочной работы, выделяют существенное, закономерное не сразу, а после выполнения определённых тренировочных упражнений умеют увидеть в частном общее;

для усвоения знаний требуется более длительное время по сравнению с учащимися высокого уровня обучаемости). Группа с низким уровнем развития познавательных интересов (усваивают материал после многократных упражнений и не всегда в полном объёме, затрудняются в выделении существенного, закономерного после общей тренировочной работы со всем классом, выполняют задания репродуктивного характера; овладевают знаниями за более длительное время, чем предыдущая группа учащихся). Для изучения способностей, обучающихся применяются методы наблюдения, анализ выполненных работ, анкетирование и т.д.

- Отбор материалов для изучения по данному курсу согласно требованиям программы, который бы соответствовал уровню каждой из групп.
- Учет индивидуальных особенностей, обучающихся на каждом этапе урока и при выборе соответствующих методов и приемов обучения.
- Разработка и использование в учебном процессе разно-уровневого и разнонаправленного дидактического материала, особенно для проведения контроля знаний и самостоятельной работы.
- Этап проверки и оценки знаний, определение уровня усвоения материала каждым обучающимся и соотнесение его с соответствующей группой познавательной активности.

В методической литературе по математике различают два вида дифференциации: уровневая (внутренняя) и профильная[42].

Уровневая дифференциация выражается в том, что обучение учащихся одного и того же класса в рамках одной программы и учебника проходит на различных уровнях усвоения учебного материала. Определяющим при этом является уровень обязательной подготовки (базовый уровень), который задается образцами типовых задач. На основе этого уровня формируется более высокий уровень овладения материалом − уровень возможностей.

Уровневая дифференциация предполагает, что каждый ученик класса должен услышать изучаемый программный материал в полном объёме, увидеть образцы учебной математической деятельности. При этом одни учащиеся воспримут и усвоят учебный материал, предложенный учителем или изложенный в книге, а другие усвоят из него только то, что предусматривается обязательными результатами в качестве минимума. Каждый ученик имеет право добровольно выбрать уровень усвоения и отчетности в результатах своего учебного труда по каждой конкретной теме (разделу), а возможно и курсу в целом. Задачей учителя является обеспечение поступательного движения учащихся к более высокому уровню знаний и умений.

Учебные задачи в математике рассматриваются как цель и как средство обучения. В силу этого нормативные требования к усвоению того или иного раздела (темы) формулируются и задаются в виде задач различного уровня сложности, решение которых является обязательным или желательным результатом обучения[35].

Выделим три уровня сложности учебных задач, которые соответствуют I, II и III уровням усвоения опыта[21].

I уровень. Задачи решаются учащимися на основе только что изученных знаний и способов деятельности, которые они воспроизводят по памяти. Это типовые задачи на непосредственное применение теорем, определений, правил, алгоритмов, формул и т. п. в различных конкретных ситуациях, не требующих преобразующего воспроизведения структуры усвоенных знаний. Готовность учащихся выполнять воспроизводящую деятельность этого уровня рассматривается как обязательный результат обучения, который вычленен в большинстве школьных учебников.

II уровень. Задачи требуют от учащихся применения усвоенных знаний и способов деятельности в нетиповой, но знакомой им ситуации, которая сопровождается преобразующим воспроизведением. Ученик, комбинируя известные приемы решения задач, уточняет, проясняет задачную ситуацию и выбирает соответствующий способ деятельности. Ктакого рода задачам относятся так называемые комбинированные задачи, требующие применения различных элементов знаний уже усвоенных на I уровне.

III уровень. Задачи этого уровня требуют от ученика преобразующей деятельности при избирательном применении усвоенных знаний и приемов решения в относительно новой для него ситуации, заключающейся в использовании действий I и II уровней, в конструировании новых для ученика систем, позволяющих решить предложенную задачу. В процессе поиска решения задачи ученик, используя интуицию, смекалку, сообразительность, сам выходит на неизвестный для себя способ решения, открывая новые знания. Деятельность ученика постепенно освобождается от готовых образцов, сложившихся установок и приобретает гибкий поисковый характер.

Учитель не принимает активного участия ни в выполнении задания, ни в решении задач, но, тем не менее, он организует всю деятельность. Самостоятельная работа всегда характеризуется какими-либо результатами, к которым ученик всегда приходит самостоятельно. Этот результат, его ценность и такая значимость осознаются много острее и значимее по сравнению с теми, что получаются при совместной деятельности учителя и учеников. Результат работ всегда показывает не только уровень знаний, но и уровень самостоятельности школьника, наличие индивидуального стиля в его деятельности, присутствие творчества и нестандартного подхода к работе.

Домашняя работа учащихся – особый вид самостоятельной работы, который проходит без непосредственного руководства учителя, поэтому он особенно нуждается в создании всех необходимых условий для успешного его выполнения. Домашнее задание должно представлять собой логическое продолжение урочной деятельности ученика[18].

Наличие индивидуализации домашнего задания создает оптимальные условия для успешного устранения пробелов учебного материала, для выявления и развития творческих способностей учащихся. Вместе с тем индивидуальный подход к учащимся при выполнении ими домашнего задания становится реально возможным, если при этом одновременно ставятся дифференцированные задачи по работе со слабоуспевающими и наиболее подготовленными учениками.

Уровневая дифференциация в стандартах образования основывается напланировании результатов обучения в виде систем задач на двух уровнях:уровни обязательной подготовки и повышенном уровне (уровнивозможностей)[33].

Для школьной практики очень важны способности учащегося, проявляющиеся в учебной деятельности и определяющие особуюхарактеристику личности – уровень умственного развития.

Уровень интеллектуального развития ребенка в педагогической практикесвязывают прежде всего, с его учебными успехами, педагоги делятучеников по данному признаку на отличников, хорошистов, троечников,двоечников. Однако по заявлению психологов дело обстоит гораздосложнее: в уровни умственного развития следует различать: 1)обучаемость и обученность; 2) общие специальные умственныеспособности[18].

Обучаемость (способности к учению, умственные способности) определяетвозможности ребенка добиваться в более короткие сроки более высокогоуровня и качества знаний и умений.

Обученность содержит весь объем усвоенных знаний и навыков (ЗУН),определяет культурный уровень, кругозор, эрудированность индивида ивесьма зависит от прошлого обучения и от социальных условий в которыхпротекала его жизнедеятельность. Своню роль играют особенностьнравственно-волевых качеств личности трудолюбие, настойчивость,самостоятельность, школьные оценки, баллы успеваемости по предметампредставляют оценку, прежде всего обученности ребенка.

Обучаемость и обученность зависят друг от друга и развиваются чаще всегопараллельно. Обучаемость представляет собой потенциальные возможности,предпосылки для учения (зону ближнего развития), обученность же являетсярезультатом учения и содержательной базой для реализации способностей(зона актуального развития). Вот почему определение уровня умственныхспособностей (обучаемости) школьников представляет столь труднуюпроблему и никак не может быть сведено к школьному баллу успеваемости.

По уровню общего умственного развития (обучаемости+обученности) можноотметить следующие группы детей школьного возраста[16]:

- малоспособные дети с аномалиями развития задатков, задержкой психического развития (обучаемость и обученность значительно ниже нормы), такие дети не в состоянии достичь заранее намеченного уровня ЗУН даже за столь длительное время (составляют до 5% учащихся; их надо обучать по особой программе, с особыми целями);
- педагогически запущенные дети (настолько слабая обученность, что даже наличие хорошей обучаемости не выводит их на возрастную норму достижений; однако при достаточном времени и средствах эти дети способны освоить заданный материал; их количество по разным оценкам колеблется в пределах 10-40%);
- дети со средним уровнем развития (обучаемость о обученность соответствуют среднестатистической норме; эти дети составляют большинство 60-70%);
- способные, продвинутые в развитии обучаемости (быстро «схватывают») и обученности (много знают) по сравнению со средней возрастной нормой (эта основная часть отличников и хорошистов – 5-10%);
- одаренные, или талантливые – высший уровень обучаемости, им (им по силам то, с чем не могут справиться другие; могут учиться в высоком темпе;
- составляют 1-3% учащихся). Большие коррективы в эту структуру распределения вносят уровень воспитанности детей; социальные условия микрорайона и, наконец, определенный состав учащихся школы.

Уровневую дифференциацию можно организовать в разнообразных формах,которые существенно зависят от индивидуальных подходов педагога, отособенностей класса, от возраста учеников и др. в качестве основного путиосуществления дифференциации обучения предполагается формированиемобильных групп. Разделение на группы осуществляется, прежде всего, наоснове критерия достижения уровне обязательной подготовки. Работа этихгрупп может проходить в рамках обычных уроков. Их можно также временновыделить для отдельных занятий. В первом случае рационально неограничиваться дифференцированным подходом в процессе самостоятельнойдеятельности школьников, а варьировать характер работы групп(самостоятельная или фронтальная под руководством учителя) в зависимостиот этапа изучения темы, от потребности в помощи педагога.

Во второмслучае рационально предусмотреть работу и с группами выравнивания, и сгруппами повышенного уровня, создать соответствующие программы иметодику обучения.

Эффективность дифференциации обучений зависит во многом и от того,насколько успешно сформированы типологические группы школьников.Последнее понимается в контексте адекватности оснований разделения нагруппы по математическим способностям[4].

Принципиальными составляющими реализации дифференцированногообучения является создание критериев деления учащихся, диагностикасформулированных критериев и технология реализации самого разделения врамках образовательного процесса. Этой проблемой занимались многиевыдающиеся педагоги, такие, как: В.В.Гузеев, О.Б.Епишева, А.Н.Капиносов, Е.С. Рабунский, И.Э.Унт, Р.А.Утеева и др.

Необходимо отметить, что в методических и педагогических источниках существует более двух десятков критериев разграничения, обучающихся на группы.

В частности, А.Н.Капиносов полагает, что реальностью, предопределяющей важность дифференцированного обучения математике в

5-9 классах,является справедливо существующее различие учащихся в темпах овладенияучебным материалом, а также в способностях самостоятельно применять полученные навыки и знания [24, с. 36]. По проявляемым в этих отношениях различиям, учащиеся с некоторой степенью условности могут быть разграничены на три группы:

- обучающиеся с высоким темпом продвижения в обучении: общая схема выполнения типовых задач усваивается фактически в ходе их первичного объяснения, преимущественно самостоятельно могут находить решения измененных типовых или усложненных задач, которые предполагают использование ряда существующих способа решения;
- обучающиеся со средним темпом продвижения в обучении: овладение новыми умениями и знаниями не вызывает сложностей, способы выполнения типовых заданий усваиваются после рассмотрения 2-3 образцов, решение измененных и усложненных задач находят, основываясь на указаниях учителя;
- обучающиеся с низким темпом продвижения: в ходе усвоения нового материала испытывают определенные сложности, преимущественно нуждаются в дополнительных разъяснениях, обязательными результатами овладевают после достаточно длительной тренировки способностей к самостоятельному нахождению решений измененных и усложненных задач не проявляют.

При возникшем интересе и возможности, обучающиеся могут перейти на болеевысокие уровни на любой стадии обучения, т. е. предусматриваетсяпоследовательное продвижение ученика.

В.А. Далингер разграничение на группы проводит, в первую очередь, учитывая критерий достижения уровня обязательной подготовки. Работа этихгрупп может осуществляться в рамках обычных уроков. Также их можно временновыделить для отдельных занятий[18, с. 162].

Предполагаемый подход обладает многочисленными преимуществами над традиционным, поскольку позволяет учителю обозначить четкие ориентиры для отбора содержаниядифференцированной работы, придать ей целенаправленный характер.

Разделение обучающихся на группы в зависимости от достижения ими уровняобязательной подготовки носит объективный характер. Организуемая учителем дифференцированная работа выглядит объективной и вглазах школьника. Поэтому почвы для обид не создает. Важно, что школьник может сам оценивать свои возможности и подобрать для себя тотуровень целей, который коррелируется с его возможностями и интересами вданный момент времени. Ориентация на обязательные результаты обученияпостоянно поддерживает подготовку учащегося на основном уровне. Это позволяет обучающемуся при возникшем интересе и стремлении перейти наболее высокие уровни обучения. Все это выступает в качестве гарантии оперативности,гибкости, мобильности дифференциации, формирует в классе атмосферувзаимного доверия между педагогом и учащимися, способствует активномувведению положительных мотивов учения для разных категорий, обучающихся [25].

Такой подход к дифференциации обучения является значимым условием гуманизации и демократизации образования.

Тенденция гуманистической направленности в обществе имеет тесную связь с перспективами воплощения идеи «развитие личности в развивающемся мире» [7, с. 12]. Гармоничное развитие личности, ее психологического состояния, гуманистической ориентации является актуальной проблемой современности. Во многом разрешение данных проблем зависит от уровня образования. Именно оно выступает в качестве ключевого механизма развития гуманистической сущности личности.

Привлечение достижения уровня обязательной подготовкивполной мере согласуется с имеющимися подходами с организациейдифференцированной работы на основе измерения уровня обученияшкольников. Но, в отличие от понятия «уровень обучения», котороеинтерпретируется каждым учителем по-разному, обозначенный критерий носитобъективный характер. Это позволяет ставить вопрос обэквивалентности среднего образования, что является значимым в условиях поликультурной школы. Важно отметить, что вопросыэквивалентности образований в настоящее время широко поднимаются и решаются вобщеевропейском масштабе.

Привлечение обозначенного критерия совершенно не исключает возможности учитывать такие качества учащихся, как трудоспособность, самостоятельность, интерес к познанию, уровень мышления, внимательность идр. Помимо этого, уровневый подход дифференциации позволяет принимать во внимание данные личностные качества в большей степени, нерассматривать их как заданные для разграничения обучающихся на группы, аразвивать и формировать их у всех учеников в процессе дифференцированной деятельности [33].

В настоящее время наиболее остро обозначен вопрос реализации уровневойдифференциации в обучении математике. Анализ методическихисследований и опыта работы педагогов по математике [14; 17; 42] дал возможность обозначить ряд методик работы с разными группами учащихся вучебном процессе: дифференциация целей и учебных заданий, применение тестов и рейтинговые оценки, комбинация различных форм учебной работы.

В частности, Г.Д.Глейзер рассматривает интересный виддифференцированных задач, которые предполагают дозирование учебнойпомощи обучающимся. Это карточки-информаторы, наряду с заданиемучащемуся, которые содержат компоненты дозированной помощи. Объем этой помощи имеет различные вариации [14].

В.А.Гусев, приняв за основу деятельностный подход к обучению, рассматриваетследующую систему реализации дифференцированного обученияматематике[17]:

1) обозначение трех групп целей обучения (имеют связь с получением образования, с развитием конкретных личностных качеств, с развитием креативного мышления);

2) выделение содержаний обучения трех видов учебного материала;

3) разработка системы самостоятельных работ на трех уровнях;

4) разработка трех видов цепочек задач, которые содержат новые сведения;

5) становление ключевых приемов умственной работы, а на их базе, учитывая индивидуальный характер овладения ими более сложных приемов деятельности.

Р.А.Утеева предложила концепцию дифференцированного обучениялматематике с позиции форм учебной работы. Форма учебной работы – способ организации взаимосвязанной и обусловленнойдеятельностью педагога и обучающихся на уроке, базирующейся на некотором видеучебного сообщения (взрослыми со сверстниками и самим собой). Смысл каждой из форм определяется комплексом ряда значимых признаков, которые дают возможность установить органическое сочетание данных форм вучебном процессе[42, с. 38].

Р.А.Утеева обозначает признаки данного сочетания:

- цели деятельности педагога и ученика;
- вид учебного задания;
- вид учебной работы, который реализует соответствующий ему вид дидактического отношения между педагогом и обучающимися;
- мера помощи со стороны педагога;
- руководство процесса выполнения заданий и результат деятельности.

Разные формы учебной деятельности требуют от учащихся разныестепени самостоятельности в процессе обучения. Р.А.Утеева определяет условия продуктивности выбора и использования форм учебной деятельности наразных этапах учебного процесса обучения математике, а также ключевую структуру взаимосвязи различных форм учебной деятельности, которая удовлетворяет принципу постепенного возрастания степенисамостоятельности школьников. Дифференцированные формы учебной работы предполагают самостоятельную работу обучающихся подифференцированным заданиям, построенным с учетом специфики типологической группы школьников [Там же].

Р.А.Утеева выделяет четыре такиегруппы:

1) Знающие «сверх программы».
2) С хорошим уровнем умений и знаний.
3) С минимальным уровнем умений и знаний.
4) Не достигшие минимального уровня.

Затем при помощи дифференцированных форм учебной деятельности получают реализацию следующие цели. С учащимися 1 группы:

- углубление и расширение знаний, развитие умений решать задачи повышенной сложности;
- развитие устойчивого интереса по предмету, углубление представлений о роли математике в науке, технике, жизни;
- развитие умений самостоятельно работать с учебными и научно-популярными источниками;
- доведение обучающихся до более высокого уровня усвоений знаний и способов деятельности.

С учащимися 2 группы:

- повторение, ликвидация пробелов, актуализация знаний для эффективного освоения новой темы;
- развитие и закрепление интереса к математике и учебной математической работе;
- становление навыков учебного труда, умений самостоятельно работать над задачей;

- доведение обучающихся до продуктивного уровня усвоения знаний и способов деятельности.

С учащимися 3 группы:

- ликвидация пробелов в знаниях и умениях;
- пробуждение интереса к предмету (элементы игры, занимательные задачи), систематическая организация самостоятельной работы на уроке и дома;
- развитие навыков и умений по осуществлению самостоятельной воспроизводящей работы (по образцу и в сходных ситуациях);
- доведение учащихся до минимального уровня усвоения знаний и способов деятельности [Там же].

Эффективность концепции Р.А. Утеевой получила обоснование в практической деятельности, а также положительные отзывы авторитетных педагоговсовременности.

О.Б. Епишева дифференцирует обучающихся по уровню становления умений и знаний. Исследователь разграничивает обучающихся на три уровня[21, с. 42]:

1) первый уровень – «минимум» успеваемости;
2) второй уровень – обязательный;
3) третий уровень – уровень возможностей.

Обучающиеся разных уровней продвигаются по-разному. Однако этап становления приемов осуществляется в разном темпе, с разнымсодержательным наполнением, с разной степенью внешней поддержки.

Следовательно, учащимся первого уровня необходимо создавать условия длясамостоятельного использования готовых частных приемов в знакомойситуации и учить применять их. Обучающиеся второго уровня могутсамостоятельно применять обобщенные приемы в стандартных ситуацияхи условиях. Учащихся третьего уровня важно обучать переносу обобщенныхприемов в незнакомой ситуации и выявлению, а также привлечению новых приемов.Предложенный О.Б.Епишевой анализ психологической исследовательскойдеятельности демонстрирует, что уровень сформированности всех ее составляющих имеет связь с умением или неумением выполнять действия с конкретными характеристиками, а в качестве основы умений выступает сформированность приемов учебной работы. Сочетание данных приемов исследователь называет уровнем учебной деятельности[21, с. 43].

Изучение теоретических источников показало, что в процессе осуществления дифференцированногоподхода и учета индивидуальной специфики обучающихся, эта работа должна проходить комплексно и охватыватьи его содержательный, иорганизационный аспект. Все это дает возможность учитывать индивидуальную специфику обучающихся за счет содержания учебного материала и различных заданий, которыеотличаются формой предъявления условия, содержанием, уровнем сложности,соотношением приемов анализа и синтеза в ходе поисковой и исследовательской работы.Необходимо заключить, что привлечение разных форм организаций работы обучающихся порешению задач, различных приемов работы с ними, также мера помощи,оказываемая учащимся при решении задач, дает возможность охватитьорганизационный аспект проблематики учета индивидуальной специфики обучающихся.

## Выводы по главе 1

В процессе исследования были рассмотрены различные определения дифференцированного обучения. Наиболее полным представляется следующее: дифференцированноеобучение – это такая организация учебного процесса, при которойучитываются индивидуально-психологические особенности личности,формируются группы учащихся с различающимся содержаниемобразования, методами обучения. Основной целью дифференцированногообучения является предоставление каждому учащемуся возможностиреализации своих способностей на максимальном уровне, но не нижебазового уровня. Именно в данной трактовке основополагающимкритерием дифференцированного обучения является учет индивидуальныхособенностей учащихся.

Изучение педагогической и психологической литературы позволяет сделать вывод, что в настоящее время во многих работах выдвигается необходимость учетаиндивидуальных особенностей школьников при обучении. Это требованиенаходит отражение в педагогической теории под названием принципаиндивидуального подхода. Дифференциация обучения предусматриваетиндивидуализацию учебной работы.

Уровневая внутриклассная дифференциация является наиболееэффективным способом дифференцированного обучения для массовойшколы.

Ключевым этапом организации дифференцированного обученияявляется диагностика индивидуальных особенностей учащихся. В основудиагностической системы положены следующие индивидуальныеособенности учащихся: биологические; интеллектуальные; навыкиучебного; основные отношения; бытовые явления; образовательнаяподготовленность; некоторые морально-волевые качества личности.

Необходимость внедрения дифференцированного подхода насовременном этапе подтверждается практикой: дети учатся самоорганизации, умению проводить самооценку. Происходитпереосмысление их внутренней мотивации к обучению. Ученик становитсяактивным участником педагогического процесса. Индивидуальное развитиеученика, его личная самооценка на каждом этапе урока формирует уподрастающего поколения стремление учиться по своему внутреннемуубеждению.

Важными условиями эффективной реализации технологиидифференцированного обучения являются: обеспечение организациидифференциации во всех педагогических системах и их компонентах сдостаточной интенсивностью; соблюдение гуманистическойнаправленности дифференциации; функциональная определенностьсубъектов дифференциации; разработка в общедидактическихисследованиях механизмов осуществления дифференциации в различныхнаправлениях; наличие учебно-методических комплексов, обеспечивающихдифференцированное обучение; создание благоприятной среды длясамовыражения учащихся на уроках, в кружках, клубах по интересам, нафакультативах; психологическое сопровождениедифференцированного обучения.

# Глава 2. Организация дифференцированного подхода в процессе изучения стереометрии

## 2.1. Логико-математический анализ школьного курса стереометрии

В соответствии с требованиями ФГОС, разные авторские коллективы предлагают ряд учебников геометрии 10-11 классов.

- Атанасян Л.С., Киселева Л.С., Позняк Э.Г. Геометрия. 10-11 классы. Учебник. Базовый и углубленный уровни. ФГОС (2021 г.).

Учебник соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту среднего (полного) общего образования, рекомендован Министерством образования и науки РФ и включён в Федеральный перечень учебников.

Учебник дает возможность обеспечить вариативность обучения согласно системе условных обозначений, а также благодаря хорошо подобранной системе задач, которая содержит типовые задачи к каждому параграфу, дополнительные задачи к главе и задачи повышенной сложности.

Теоретические тексты являются доступными и краткими.Последовательно представлена система упражнений, которая включает задачи разного уровня сложности, приводятся примеры решения наиболее важных задач. Причем эти решения наиболее сложных задач потребуются учащимся в качестве опорных, к примеру, при доказательстве теорем, следствий из теорем. Также присутствуют дополнительные задания, которые следуют после всей главы.

При решении дополнительных задач у учащихся развиваются три качества: логическое мышление, пространственное воображение и практическое понимание.

Тема «Объемы тел» включает разделы: объем прямоугольного параллелепипеда, объемы прямой призмы и цилиндра, объемы наклонной призмы, пирамиды и конуса, объем шара и площадь сферы, объемы шарового сегмента, шарового слоя и шарового сектора.

В начале курса стереометрии основные теоретические сведения изучаются с опорой на геометрические тела. Это повышает доступность материала, а, следовательно, результативность обучения.

- Шарыгин И.Ф. Геометрия. 10-11 класс. Учебник. Базовый уровень. Вертикаль (2020 г.).

Данный учебник входит в учебно-методический комплекс по математике для 10-11 классов и реализует авторскую наглядно-эмпирическую концепцию построения курса стереометрии. Внимание акцентировано на методах решения геометрических задач, а также реализации дифференцированного изложения учебного материала: знаком (*) отмечается материал для углубленной подготовки; буквой (в) − важные, (п) − полезные, (т) − трудные задачи.

В учебнике реализована авторская наглядно-эмпирическая концепция построения геометрии в рамках школьного курса. Просматривается отказ от аксиоматического метода, также внимание акцентировано на привлечении наглядных методов в ходе построения теории и решения задач. В учебнике нетрадиционно изложено множество необходимых и важнейших теоретических фактов.

Уровень общей математической культуры школьников определяется в значительной степени тем, насколько сознательно ониупотребляют математические термины, и борьба за повышениеэтой стороны культуры есть борьба за усвоение определений. Плохо,если учащиеся употребляют термины, точный смысл которых имнеясен; правильно поступает тот учитель, который требует, например, точных определений таких постоянно применяемых в школьной геометрии терминов, как вертикальная прямая, горизонтальная прямая:вертикальной, или отвесной, называется, всякая прямая, проходящая через центр земли, горизонтальной − всякая прямая, к нейперпендикулярная.

Развитие логического мышления получает реализацию с помощью рационально подобранного задачного материала и разумного сочетания логики и интуиции школьников. Заданный материал по теме «Объем многогранников» дает возможность использования разных методов. Одна и та же задача имеет несколько вариантов решения. Целенаправленная работа педагога по решению «опорных» задач (задач, которые часто встречаются и являются компонентами других задач по теме «Объем многогранников»), по обучению умению использовать разные методы в процессе их решения, по отбору задач для демонстрации продуктивности того или иного метода решения дает ощутимые результаты.

В целом материал учебника представляет педагогу богатые возможности для дальнейшего развития логического мышления школьников. В учебнике представлены новые понятия, даются их определения, осуществляется доказательство теорем. При этом возможным является продуктивное использование разных методов (координатный, векторный, др.). Решение задач на построение или задач, которые включают построение как промежуточный элемент, требует логического обоснования, умелой записи.

В работе над стереометрией преследуются следующие задачи: изучение геометрических фактов, воспитание логических навыков, развитиепространственного воображения, умение применять теоретические сведенияк решению различных геометрических задач, какие ставит практическая жизнь и другие науки, педагог встречается при этом со следующими особенностями этого курса.

1) Курс стереометрии строится в предположении, что курс планиметрии полностью усвоен. Каждый раздел курса математики в средней школе строится на базе всего ранее пройденного, но все недочеты изучения планиметрии ощущаются при изучении стереометрии особенно болезненно, значительно тяжелее, чем, например, недочета в знаниях по арифметике при изучении алгебры. Изучая стереометрию, приходится все время возвращаться к планиметрии, требуя от учащихся повторения того, что нужно для понимания каждого нового вопроса или задачи.

При решении стереометрических задач чаще всего вопрос сводится к решению некоторой планиметрической задачи, и учащиесяиспытывают затруднения по двум причинам: как из-за неумения выполнить такое сведение, так и из-за трудностей, встающих напути решения этой задачи планиметрии. Например, желая выяснить, как расположена высота в пирамиде, имеющей равные боковые ребра и основание в виде прямоугольного треугольника, мыдолжны сообразить, что равенство боковых ребер влечет за собойравенство их проекций на плоскость основания, так что задачасводится к такой: «В плоскости имеется прямоугольный треугольник, и необходимо найти точку, равноудаленную от трех его вершин,т. е. центр описанной около него окружности». Очевидно, что учащийся,затрудняющийся решить эту простую планиметрическую задачу,не справится и с указанной задачей стереометрии и что для успешного решения стереометрических задач нужны частыевозвращенияк задачам планиметрии.

2) Занимаясь планиметрией, учащиеся пользуются чертежами, дающими ясное представление об изучаемых объектах. В стереометрии положение было бы аналогичным, если бы использовали модели столь же широко, как чертежи, что, однако, и невозможно, и нежелательно, так как тогда плохо развивалось бы пространственное воображение. Вместо моделей

постоянно применяются чертежи, представляющие не самый изучаемый объект, а его изображение на плоскости, и как при выполнении таких чертежей, так и при пользовании ими возникает ряд трудностей. Что касается употребления моделей, то, рассуждая теоретически, здесь, следует опасаться двух противоположных крайностей: недостаточного использования моделей, когда учащиеся не получают ясных представлений об изучаемых объектах и все их знания оказываются только формальными, неприменимыми, непрочными, и чрезмерного применения моделей, когда учащиеся не упражняют и не развивают свою способность видеть все детали изучаемого объекта умственным взором. На практике вторая опасность не существует, поскольку построение моделей или добывание готовых моделей связано с немалыми затруднениями, первая же опасность достаточно реальная. Необходимо широко использовать предметы окружающего мира, указывая в них изучаемые пространственные формы.

3) Занимаясь планиметрией, учащиеся делают свои заключения в большинстве случаев первоначально только на основании интуиции: логическое рассуждение вступает в свои права после того, как интуиция подсказала ту или иную догадку, и задача рассуждения − либо доказать правильность этой догадки, либо опровергнуть ее. В общем то же самое соотношение между интуицией и логикой имеет место и при изучении стереометрии, но все же роль логики здесь уже несколько больше, что соответствует и возрасту учащихся 9 и 10 классов. Здесь можно предъявлять повышенные по сравнению с предшествующими классами требования к логической стороне всей работы, добиваясь полного устранения всех недочетов, оставшихся от прошлых лет, по части умения давать правильные определения, выполнять классификацию, разбираться в составе каждого предложения, делать обоснованные выводы, правильно проводить более или менее длинные рассуждения, четко устанавливая предпосылки.

4) Программа курса стереометрии предполагает более быстрый темп работы по усвоению нового материала, чем программа планиметрии.

Очевидно, что при изучении стереометрии приходится предъявлять значительные требования к самостоятельной работе учащихся, однако следует помнить об ограниченности времени учащихся и детально продумывать все задания, не допуская непроизводительной траты времени.

Изображая, на плоскости изучаемую пространственную фигуру, стремятся к тому, чтобы вызвать у человека то самое зрительное впечатление, какое получилось бы у него при непосредственном рассматривании этой пространственной фигуры. Этазадача обеспечения наглядности изображения выступает в преподавании на первый план, в технических же чертежах большоезначение имеет также обеспечение удобоизмеримости: сведения оразмерах всех деталей изображенной на чертеже пространственной фигуры должны получаться,более или менее просто на основании измерений по чертежу.

Те задачи, какие носят обычно название задач на построениев пространстве, имеют характер, существенно отличный от того,какой имеют планиметрические задачи на построение.Большое значение таких задач для закрепления значения теории и развития пространственного воображения является бесспорным, и их можно рекомендовать как материал длядополнительных заданий более сильным учащимся и как темы длядокладов, причем успеху работы способствует построение даже самых примитивных моделей,т. е. хотя бы частичное превращение этих условных задач напостроение в задачи на построение в собственном смысле слова.

Наглядность изображения пространственной фигуры F в наибольшей степени обеспечивается применением центрального проектирования: из некоторой точки S пространства, не совпадающейни с одной из точек фигуры F и именуемой центром проекции,проводятся прямые через все точки фигуры F и продолжаются допересечения с плоскостью чертежу, на которой получается, такимобразом, некоторая фигура F, производящая при рассматриванииее из точки S то же самое зрительное впечатление, как и фигура F.

Построение такого перспективного чертежа (рисунка) представляетизвестные трудности и применяется в курсе геометрии сравнительно редко, тем более что измерения по такому чертежу весьма затруднительны. Почти той же наглядностью, как перспективныйчертеж, обладает обычно применяемая в преподавании стереометрии «кабинетная» проекция, представляющая собой частный случай так называемой аксонометрии: отрезки и углы, расположенныепараллельно плоскости чертежа, изображаются на нем в натуральную величину с сохранением направления, а отрезки, ей перпендикулярные, уменьшенные под углом в 45°или в 60°. Несколько упрощая положение, можно представитьдело так, как будто рассматриваемая пространственная фигура Fосвещается спереди и сбоку параллельными лучами и отбрасываетна экран теневое свое изображение F, причем экран располагается не перпендикулярнок лучам, как при ортогональном проектировании, а наклонно к ним. Возможностьвыбора одного из многих положений фигуры относительноэкрана (плоскости чертежа)позволяет получить изображение F, обеспечивающее наибольшую наглядность.

На рисунке 1 представлено слева изображение в кабинетной проекции пирамиды. Пользуясьтолько этим чертежом, можно сказать, что эта пирамида имеетв основании прямоугольный треугольник с прямым углом приточке C, что высота DE пирамиды проходит через середину гипотенузы AB треугольника основания, изображенного отдельносправа в натуральную величину, что проекции боковых реберAD, BD, CD на плоскость основания, т. е. отрезки AE, BE, CE,равны между собой, что равны в силу этого и все три боковых ребра.

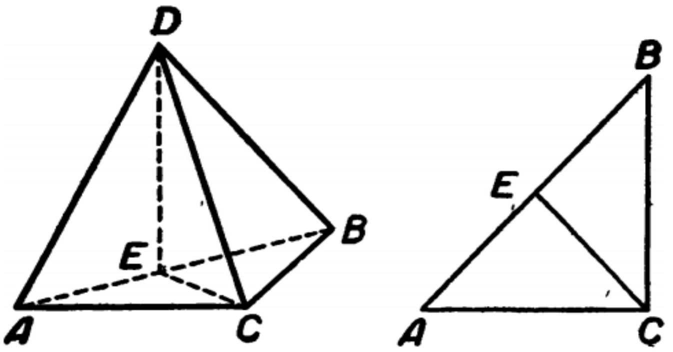


Рис. 1. Проекция пирамиды

Использование в одних чертежах ортогональной, а в другихкабинетной и других аксонометрических проекций вполне допустимо и желательно, но нехорошо, если некоторые элементы какого-либо чертежа выполняются в одной, другие в другой проекции,или в одной и той же проекции, но при разных положениях фигуры F относительно плоскости чертежа, как это бывает нередко.

Так, на рисунке 2 слева изображен шар с его экватором EQ и перпендикулярной к его плоскости осью NS. Такое изображение осиможет получиться только при ортогональном проектировании,притом если она расположена параллельно плоскости чертежа.

Можно считать, что шар освещается лучами, перпендикулярнымиплоскости чертежа; на этой плоскости получается контур шарав виде круга, а всякий диаметр шара, параллельный плоскостичертежа, изобразится диаметром круга. Но при таком проектировании экватор изобразится не в виде эллипса, как он изображенна рисунке 2 слева, а в виде диаметра EQ, перпендикулярногооси NS, как это сделано на рисунке 2 в середине.

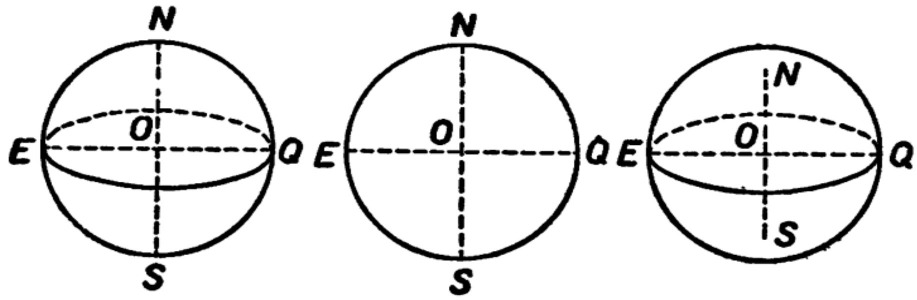

Рис. 2. Контур шара

Однако этот верный чертежне нагляден. Чтобы устранить ошибку,сохраняя наглядность, можно применить ортогональное проектирование, но при наклонном по отношению к плоскости чертежа положениидиаметра шара NS: верхний его конец Nнаходится в видимой, т. е. передней половине шара, нижний S − в невидимой(задней). Такой правильный и достаточно наглядный чертеж имеем на рисунке 2 справа.

Отметим только еще один видошибок, встречающихся в школьных чертежах: нередко берутсяпроизвольно такие элементы чертежа, которые вполне определеныдругими его элементами. Так, например, пусть требуется изобразить многогранник, который получается, если провести в прямоугольном параллелепипеде плоское сечение, не параллельное основанию, и одну часть параллелепипеда отбросить. Три точки пересечения боковых ребер с плоскостью сечения, например, точки $A_1$, $B_1$, $C_1$ на рисунке 3, можно взять произвольно, четвертую же точку$D_1$ приходится строить, проводя вспомогательные отрезки AC,BD, $A_1C_1$, $EE_1$, $B_1E_1$, так как точки пересечения диагоналей основания и сечения находятся на одной прямой, параллельной боковым ребрам.

Нечто подобное имеем и на рисунке 2 (справа); выборположения точки N вполне определяет и положение точки S и длинумалой оси эллипса, изображающего экватор.

В случаях, когда имеются основания сомневаться, вполне ли ясно учащиесяпредставляют ту или иную пространственную фигуру, очень полезно не ограничиваться чертежом, представляющим фигуру в какой-либо одной проекции, апостроить несколько чертежей при разных положениях фигуры относительноплоскости чертежа или даже при разных способах проектирования. Особеннопомогают обеспечить ясность представлений особые чертежи, изображающиедетали общего чертежа (например, отдельные грани, сечения) без искажений.

Однако необходимо признать, что как бы хороши ни были чертежи, изображающие на плоскости пространственные фигуры, в практике преподавания встречается немало случаев, когда полная ясность представления обеспечиваетсятолько рассмотрением модели. Таково положение, например, при выяснениивопроса о равенстве и симметрии трехгранных углов. Никакой чертеж не даетздесь того, что дают две примитивные бумажные модели, изготовляемые учителем (а затем и всеми учащимися) в течение нескольких минут из куска плотнойбумаги: начертив на нем две развертки, их вырезают,сгибают и склеивают (или сшивают). Учащиеся, выполнившие эту работу, с удивлениемубеждаются, что равенство плоских углов еще не обеспечивает равенства трехгранных углов, и запоминают о существовании симметричных трехгранныхуглов несравненно прочнее, чем на основании одного лишь рассуждения и рассмотрения готового чертежа.

Раздел «Прямые и плоскости»совершенно необходимая первая часть школьного курса стереометрии, представляет собой собрание большого количества отдельных вопросов, касающихся прямых и плоскостей, и их взаимного расположения в пространстве и излагаемых обычно так, что ясной дляучащихся системы в последовательности их изучения не получается. Это обстоятельство существенно повышает трудность усвоения большого материала.

Расположение материала в удобообозримой и легко запоминаемой системе хотя бы при его повторении очень облегчает прочность его запоминания. Можно рекомендовать такую систему:1) прямая в пространстве, 2) плоскость, 3) взаимное расположение двух прямых, 4) взаимное расположение двух плоскостей,5) взаимное расположение прямой и плоскости, 6) взаимное расположение трёх и большего числа прямых, 7) взаимное расположение трех и большего числа плоскостей.

Если принять эту систему, весь материал, излагаемый в учебниках, перестает производить впечатление беспорядочной массывопросов, хотя и связанных друг с другом, но не вытекающих вобязательном порядке один из другого; выясняются и некоторыепробелы обычного изложения, например, такой: каковы все возможные случаи взаимного расположения трёх плоскостей? Обычноучащиеся только позднее, в вузовском курсе аналитической геометрии, узнают, что три различные плоскости, среди которых нетдвух параллельных друг другу, пересекаются либо в одной точке,образуя восемь трёхгранных углов с общей вершиной, либо поодной прямой, образуя шесть двугранных углов с общим ребром,либо по трём параллельным прямым, образуй призматическуютрёхгранную трубу и двенадцать двугранных углов, по четырена каждую из трёх линий пересечения.В настоящее время предпочитают вовсе не давать никакого определенияплоскости, относя её к числу основных (неопределимых) понятийи указывая в виде аксиом основные свойства плоскости. Вместоопределения плоскости даётся ряд примеров таких вещей, поверхность которых напоминает геометрическую плоскость.

Раздел«Прямые и плоскости в пространстве» даёт учителю особенно многовозможностей.

Отметим, что особого внимания требует вопрос об определенииугла между прямой и плоскостью. Необходимо добиться, во-первых, чтобы учащиеся ясно понимали существование бесконечногомножества углов между прямой, пересекающей плоскость, и прямыми, проведёнными наплоскости через точку пересечения, чтобы,во-вторых, они знали, какой из всех этих углов принято называть углом между прямой и плоскостью, т. е. чтобы они зналисоответствующее определение, и, в-третьих, чтобы было усвоенопредложение о минимальном свойстве этого угла. В связи с этимхорошо поставить такую задачу: какой из углов, образуемых прямой, пересекающей плоскость, с прямыми, проведёнными на этойплоскости через точку пересечения, больше всех других такихуглов? Ответ должен состоять, разумеется, не в простом указаниина угол, образуемый прямой и продолжением её проекции на плоскость за точку пересечения, а в доказательстве этого утверждения.

Во избежание недоразумений надо с самого начала отметить, чторассматривается только та часть пространства, которая лежитпо одну сторону от данной плоскости, и что речь идёт в сущностине о прямых, проходящих через данную её точку, а о лучах, исходящих из неё.

На рисунке 3даны изображение прямоугольного параллелепипеда и три точки A1, B1, C1 на трех боковых его ребрах, требуетсяуказать точку D1 пересечения плоскости, проведенной через этитри точки, с четвертым боковым ребром (или его продолжением).

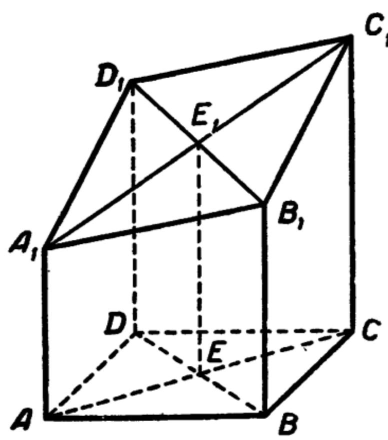


Рис. 3. Прямоугольныйпараллелепипед

Примерно ту же трудность представляет задача построения этогосечения в натуральную величину (без перспективныхискажений).

Решение задач на построение в пространстве требует, значительно больше усилий, чем на плоскости. Если учащиеся с ними не справляются, необходимо проверить, умеют ли они решать хотя бы более простые задачи на построение на плоскости, уделить некоторое время на повторение и пополнение их сведений и навыков по этому разделу, а затем вернуться к задачам в пространствеуже с более существенными шансами на успех.

Содержание раздела «Многогранники» сводится к изучению определений и свойств некоторых простейших многогранников. Материал этот невелик, несложен, богат практическими приложениями.

Сравнительная легкость этого раздела при достаточно большом числе часов, отведенных на его изучение, делает более легкимдостижение высокого качества его усвоения. Прежде всего необходимо обеспечить безупречное знание и понимание взаимной связи междупонятиями, иллюстрируя их примерами из окружающей действительности, широко пользуясь моделями и чертежами. Учащиесядалеко не всегда понимают, что параллелепипед − частный случай призмы (всякий параллелепипед − призма, но не всякаяпризма − параллелепипед), зачастую смешивают понятия прямого и прямоугольного параллелепипеда. Устранению последнегонедочета может способствовать, кроме прочного усвоения определений и использования моделей, сопоставление достаточно наглядных изображений разных параллелепипедов, например, как это показано на рисунке 4.

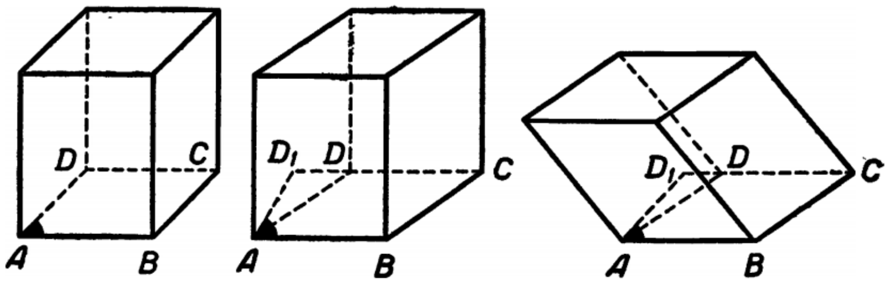


Рис. 4. Разные параллелепипеды

Установив понятие призмы, параллелепипеда, пирамиды, усеченной пирамиды, следует рассмотреть рядпримеров многогранников более сложного вида, разбивая их (разными способами) на тела этих простейших видов.

Изучение правильных многогранников проходит, как правило, с повышенным интересом, особенно если есть возможность продемонстрировать аккуратно изготовленные модели всех пяти тел.Первоначально можно показать существование пяти видов правильных многогранниковпри построении их, начиная с куба, а затем доказать, что никаких другихправильных многогранников быть не может.Вопрос о симметрии пространственных фигур, в частности о симметрии многогранников можно рассматривать с группой наиболее сильных учеников.Не менее поучителен и вопрос о соотношении между числами вершин, ребер и граней любого выпуклого многогранника (теорема Эйлера о многогранниках).Интересноотметить, что учащиеся 10 класса всегда самостоятельно открывают эту теорему,если поставить перед ними вопрос о том, нельзя ли, зная числа вершин и гранейпроизвольного выпуклого многогранника, сказать, сколько у него ребер, и предложить им провести ряд наблюдений, составляя примерно следующую таблицу (таблица 1).

Таблица 1

Наблюдения за многогранниками

| Многогранник | Число вершин (В) | Число граней (Г) | Число ребер (Р) |
|---|---|---|---|
| Куб | 8 | 6 | 12 |
| Треугольная призма | 6 | 5 | 9 |
| n-угольная призма | 2n | n + 2 | 3n |
| Треугольная пирамида | 4 | 4 | 6 |
| n-угольная пирамида | n + 1 | n + 1 | 2n |
| n-угольная усеченная пирамида | 2n | n + 2 | 3n |

Внимательное рассмотрение таблицы показывает, что всегда В + Г = Р + 2,что собственно и составляет теорему Эйлера. Замечательной является общность этой теоремы: онаверна не только для всех выпуклых многогранников, но и для всех «простых» или «эйлеровых» многогранников.

Примитивное представление об объеме тела, как числе кубиков, с ребром, равным единице, и их долей, заполняющих это тело,привычно учащимся с начальной школы. Приступаяк изучению раздела «Объем призмы и пирамиды», прежде всегодают доказательство известной формулы объема прямоугольного параллелепипеда, рассматривая, три случая: когда измерения выражаются целыми,дробными, иррациональными числами. Говоря об единицах объема, необходимо остановиться на них более подробно. В частности, следует указать, что кубический дециметр практически равен литру(по точному определению литром называется объем одного килограмма чистой воды при 4 °С, что составляет 1,000027 куб. дм).

Необходимо отметить, что с объемами многогранников делообстоит значительно сложнее, чем с измерением площадей многоугольников, поскольку для них равновеликость не означает ни равенства, ни равносоставленности: два многогранника, имеющиеодин и тот же объем, далеко не всегда можно разрезать на одинаковое число попарно равных частей. Так, из теоремы, дающей необходимое условие равносоставленности двух многогранников,вытекает, что правильный тетраэдр, т. е. треугольная пирамида,все грани которой представляют собой равные правильные треугольники, не равносоставлен с прямоугольным параллелепипедом.

Этой трудности, однако, не существует для призм, что и используется в школьном курсе, где легко доказывается равносоставленность любой наклонной призмы и некоторой прямой, а затемстоль же легко устанавливается формула, объема любой призмы.

Чтобы прийти к окончательному решению вопроса об объемепирамиды, т. е. чтобы дать доказательство полной точности заключения об отношении объемовпирамиды и призмы с равновеликими основаниями и равнымивысотами, можно идти разными путями.Значительное упрощение достигается применением формулы $1^2 + 2^2 + 3^3 + . . . + n^2 = \frac{1}{6}n\ (n + 1)\ (2n + 1)$,если рассматривать объем пирамиды как предел суммы объемов,вписанных в нее n + 1 призмы с равными высотами и постепенноубывающими основаниями.Доказательство формулы для суммы квадратов первых n натуральных чисел проще всего проводится методом совершенной индукции.

Изложение выигрывает еще больше в отношении простоты идоступности, если принять за аксиому так называемый «принципКавальери», утверждающий, что два тела с равными высотамиравновелики, если равновелики любые их сечения, проведенныепараллельно основаниям на одном и том же расстоянии от них.Это предложение может быть доказано, что и делается в курсахматематического анализа, но истинность его не возбуждает сомнений, если рассмотреть несколько подходящих примеров, как,например, стопку одинаковых стеклянных пластинок, сперва уложенных в виде прямой призмы, затем сдвинутых друг относительнодруга так, что получается некоторое приближение к наклоннойпризме с тем же основанием и той же высотой.

Вывод формулы объема усеченной пирамиды, приведенный в учебниках и основанный на вычислении высоты дополнительной пирамиды, является значительно более доступным, чемчисто геометрический вывод, основанный на рассечении усеченнойпирамиды на три полные пирамиды; его можно дать как задачуна вычисление.

***Доказать***, что объем треугольной усеченнойпризмы равен произведению площади перпендикулярного сечения на среднееарифметическое длин трех боковых ребер. Доказательство получается без труда,если разрезать эту усеченную призму на три части, а именно призму с тем жеоснованием и высотой, равной наименьшему из боковых ребер, и две треугольные пирамиды (рис. 5).

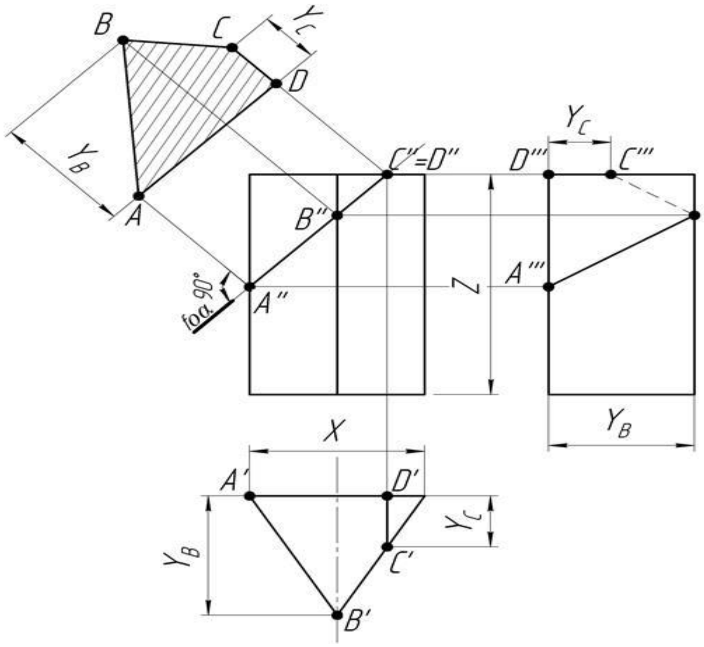


Рис. 5. Чертеж усеченной призмы

Аналогичную теорему можно доказать для усеченного прямогопараллелепипеда: его объем равен произведению площади его основания насредне арифметическое длин пары противоположных ребер или на среднее арифметическое всех четырех ребер. Для прямой призмы, усеченной непараллельнооснованию и имеющей в основании произвольный четырёхугольник или какой-нибудь многоугольник с большим числом сторон, аналогичная теорема не имеетместа: произведение площади основания на среднее арифметическое боковыхребер выражает объем усеченной прямой призмы только приближенно.

Рассмотрим задачу, решаемую смешанным построительно-вычислительнымспособом: имея эпюр прямой многоугольной призмы, усеченной непараллельнооснованию, вычислить ее объем сперва приближенно, как произведение площадиоснования на среднее арифметическое боковых ребер, затем точно, разбиваявсе тело на треугольные призмы, усеченные непараллельно основанию (всенеобходимые для вычисления данные берутся с эпюра).

Изучением так называемых круглых тел − цилиндра, конуса,усеченного конуса, шара − завершается школьный курс геометрии. Эти тела имеют большое значение и для других дисциплин, и в практической жизни.

Программа отмечает необходимость уяснения общих понятийо цилиндрической и конической поверхностях, как порождаемыхдвижением прямой (в первом случае − параллельно самой себе,во втором так, что одна ее точка остается неподвижной), но изучаются в школе только прямой круговой цилиндр, прямой круговой конус, прямой круговой усеченный конус, именуемые просто цилиндром, конусом, усеченным конусом.

Эти три теламожно рассматривать как происходящие от вращения отрезкаоколо оси, расположенной в одной с ним плоскости: отрезок, параллельный оси, порождает поверхность цилиндра; отрезок, непараллельный оси, порождает конус, если конец его находится на оси,и усеченный конус, если пересечение с осью происходит толькопри продолжении отрезка; если на оси находится одна из внутренних точек отрезка, его вращение порождает сразу два конуса, аесли отрезок перпендикулярен оси, то его вращение дает плоскуюфигуру (круг или круговое кольцо).

Стоит отметить, что в среднейшколе рассматриваются не все поверхности, порождаемые вращением прямой: если ось вращения, не лежит в одной плоскости свращающейся прямой, получается однополостный гиперболоид,изучаемый в курсе аналитической геометрии.

Вопрос о площади поверхности цилиндра и конуса, если исходить из общего определения площади кривой поверхности, встречает большие трудности. В школе этот вопрос существенно упрощают, определяя эти площади как пределы, к которым стремятсяплощади боковых поверхностей правильных призм (и соответственно пирамид), вписанных в цилиндр (конус), при условии неограниченного удвоения числа их сторон.

Наряду с этим полезно привить учащимся представление об этих поверхностях как развертках: цилиндр развертывается на плоскость и порождает прямоугольник, высота которого равна высоте цилиндра, а основание − выпрямленной окружности основания цилиндра, так что площадьбоковой поверхности цилиндра S (или, короче, боковая поверхностьцилиндра) выражается формулой S = 2πRH; конус развертывается в круговой сектор с радиусом, равным образующей l, и дугой, равной окружности основания 2πR; площадь этого кругового сектора S относится к площади круга радиуса l, т. е.$\pi l^2$, так, как длина дуги 2πR относится к длине всей окружности 2πl, что даетS = πRl. Вычисление площади боковой поверхности усеченногоконуса сводится подобным же образом к вычислению площадифигуры, представляющей собой часть кругового кольца («криволинейной трапеции»).

Формулы объема для цилиндра, конуса, усеченного конусавыводятся без затруднений после предельного перехода из формулдля объема вписанных призмы, пирамиды, усеченной пирамиды.

Очень важно уяснение зависимости между объемом, радиусомоснования и высотой: объем пропорционален высоте, но не радиусу,а квадрату радиуса (или диаметра) основания. Учащиеся с удивлением констатируют, что три цилиндрических сосуда, изображенные на рисунке 6, имеют объем далеко не одинаковый, какобычно кажется с первого взгляда.

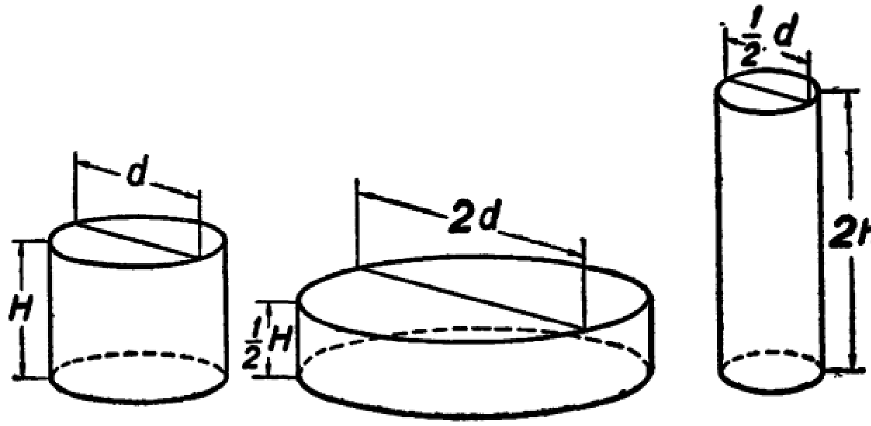


Рис. 6. Три цилиндрических сосуда

Несколько больше трудностей доставляет шар (сфера). Изложенные в учебниках геометрии теоретические сведения (определения и теоремы), не представляя собой ничего особенно трудного по существу, проходятсяобычно за недостатком времени довольно поверхностно и усваиваются учащимися далеко не основательно, а отсюда весьма непрочное знание даже таких основных формул, как формулы поверхности и объема шара. Имеет значение также и то обстоятельство, что на решение задач, в которых приходилось бы применятьэти формулы, остается очень мало времени.

## 2.2. Требования к конструированию системы задач по стереометрии, направленной на организацию дифференцированного подхода

В ходе освоения школьного курса математики задача является одной из дидактических единиц. Ключевая цель задач состоит в развитии мышления учащихся. Задачи направлены на реализацию ведущих дидактических целей: осуществляют становление системы знаний, навыков и умений решения разных типовзадач, развитие творческого мышления учащихся; способствуют развитию интеллекта, мировосприятия, духовных качеств, выполняют показательную роль вобучающем процессе.

Задачи и процессы их решения являются основой реализации целей воспитания, обучения и развития.

Работа по решению задач включает ряд этапов:

- анализ состава задачи;
- поиск плана решения;
- реализация выявленного плана и обоснование того, что полученный результат удовлетворяет требованиям задачи;
- обсуждение проведенного решения.

Формирование этих этапов деятельности происходит из некоторых элементарныхшагов, которые называются умственными действиями или умственными операциями.

Разные сочетания элементарных шагов формируют работу в целом порешению определенной задачи. Ключевым этапом решения задачи является поиск решения.

На данном этапе осуществляется выбор метода решения задачи.

О.Б. Епишева в аспекте деятельностного подхода к обучению разграничивает математические задачи школьного курса на алгоритмические,полуалгоритмические, полуэвристические и эвристические. В последнемслучае требуется не только логическое мышление, но и изобретательность, интуиция. Для обучения всех учащихся умению самостоятельнорешать задачи важно развивать у них умение находить способ решениязадачи. В процессе перехода от алгоритмически разрешимых задач к эвристическим осуществляется поэтапное расширение поля поиска способа их решения.

О.Б.Епишева выделяет ряд требований к задачам. Задачидолжны:

- быть средством связи теории с практикой;
- не только заключать изучение понятий, теорем, но и предшествовать, сопутствовать ему, т. е. выступать в качестве средства усвоения знаний;
- выступать в ходе обучения механизмом мотивации и стимулирования познавательного и учебного функционирования обучающихся;
- выступать как способ организации и управления познавательным и учебным функционированием обучающихся.

Процесс решения задачи предопределен возможностями учащегося, который решает ее. Следовательно, обучение, ориентированноена среднего учащегося, является недостаточно продуктивным. Учащийся не проводит активную работу, если учебные задачи не коррелируются с его возможностями. Это влечет за собой необходимость привлечения в обучающем процессе дифференцированных задач, которые в свою очередь способствуютреализации уровневой дифференциации школьников.

В рамках настоящего исследования под разноуровневыми задачами по стереометрии необходимо пониматьзадачи, которые выстроены с учетом специфики типологических групп обучающихся, т. е. групп, объединенных одинаковым уровнем умений, знаний, способов деятельности по дисциплине (курсу, разделу, теме), а также уровнем ихусвоения.

Основываясь на изучении педагогических и психологических источников, разграничим обучающихся в зависимости отих умений и знаний по стереометрии на следующие группы:

А – элементарный уровень знаний (задачи I уровня);

В – базовый уровень знаний (задачи II уровня);

С – углубленный уровень знаний (задачи III уровня).

Базовый уровень знаний − такие умения и знания по стереометрии,которыми учащийся должен обладать в соответствии с государственным образовательным стандартом.

Усиление математической подготовки осуществляется посредством решения нестандартных задач, которые развивают логику и умение мыслить.

**2.3. Совокупностьзадач по теме «Объемы геометрических тел»**

Представленные задачи удовлетворяетследующим требованиям:

1) охватывают все основные типы по теме «Объемы геометрических тел»;

2) направлены на становление умения применять определенный способ решения в разных ситуациях;

3) присутствует необходимое число заданий для усвоения основных формул для вычисления объемов геометрических тел;

4) присутствуют задания по возрастанию сложности – от простого к сложному;

5) присутствуют задачи, разнообразные по содержанию, форме и способам решения.

Для составления представленных задач были использованы методические пособия, учебники, задачники по геометрии дляобщеобразовательных учреждений следующих авторов: Л.С. Атанасяна, И.М. Смирновой и В.А. Смирнова.

Тема «Объемы геометрических тел» содержит следующие подтемы: «объем прямоугольного параллелепипеда; объемпараллелепипеда и объем призмы; объем пирамиды; объем усеченнойпирамиды; объем цилиндра; объем конуса; объем усеченного конуса; объемшара; объем шарового сегмента и сектора».

В процессе решения задач педагогом могут быть оказаны следующие видыпомощи ученикам:

- постановка наводящих вопросов;
- объяснения хода выполнения задания;
- сообщение результата, ответа заранее;
- сообщение теоретических сведений, на основе которых выполняется задание;
- предупреждение типичных ошибок;
- предложение выполнить вспомогательное задание, которое наводит на решение основного задания;
- оказание помощи в построении чертежа;
- указать на допущенные ошибки;

- помощь в записи условия;
- указание алгоритма выполнения задания.

*Задачи I уровня* – воспроизведение дефиниций понятий, свойств понятий, решение задач осуществляется в один или два шага, преимущественно данные задания на применение понятия в стандартной ситуации.

*Задачи II уровня* – усложнены, направлены на достижение уровняобязательной подготовки и способствуют повышению у школьников уровнясформированности понятий, а также формируют умение применять рефлексиюв учебном функционировании.

*Задачи III уровня* – во многом являются тождественными задачамгруппы В, однако некоторые из нихтребуют элементов творческой деятельности, преимущественно это задачи наприменение понятий в нестандартных ситуациях.

**Задачи для учеников группы А**

*Задача 1.*Площадь грани прямоугольного параллелепипеда равна12. Ребро, перпендикулярное этой грани, равно 4. Найдите объемпараллелепипеда.

Ответ: 48.

*Задача 2.*Найдите объем правильной шестиугольной призмы,стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 3.

Ответ: 4,5.

*Задача 3.* Пусть $h$, $r$ и $V$ соответственно высота, радиусоснования и объем конуса. Найдите объем, если высота равна 3 см, а радиусоснования 1,5 см.

Формула для вычисления объема:$V= \frac{1}{3}Sh$, где $S$ – площадь основанияконуса, $h$ – высота.

Ответ: $2{,}25\pi$ см$^3$.

**Задачи для учеников группы В**

*Задача 1*. Объем прямоугольного параллелепипеда равен 24.Одно из его ребер равно 3. Найдите площадь грани параллелепипеда,перпендикулярной этому ребру.

Формула для вычисления объема:$V = Sh$, где $S$ – площадь грани, а $h$ – высота перпендикулярного к ней ребра.

Ответ: 8.

*Задача 2*. Прямая призма описана около шара радиуса 4 см.Периметр основания призмы равен 42 см. Найдите объем и площадьповерхности призмы.

Ответ: 672 см$^3$, 504 см$^2$.

*Задача 3*. Докажите, что объем конуса равен одной шестойпроизведения площади осевого сечения на длину окружности основания.

**Задачи для учеников группы С**

*Задача 1*. Два ребра прямоугольного параллелепипеда,выходящие из одной вершины, равны 2 и 4. Диагональ параллелепипедаравна 6. Найдите объем параллелепипеда.

Решение. Длина диагонали параллелепипеда равна$d = a^2_1 + a^2_2 + a^2_3 = 20 + a^2_3$

Длина третьего ребра тогда$a_3 = d^2 – 20 = 4$. Получим, что объемпараллелепипеда$V = a_1a_2a_3 = 2 \cdot 4 \cdot 4 = 32$.

*Задача 2*. В шар радиуса R вписана правильная четырехугольнаяпризма. Радиус, проведенный к одной из вершин основания призмы, образуетс плоскостью боковой грани угол в 30 С. Найдите объем призмы.

Решение. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$– вписанная в этот шар с центром K правильная призма. Это означает, что $K \in BD_1$, $BD_1 = 2R$и в прямоугольном $\Delta BC_1D_1$ ($<C_1BD_1 = 30$ С) имеем: $C_1D_1 = ½\ BD_1 = R$, $BC_1 = BD_1 \cdot \cos 30C = R\ 3$. Тогда в прямоугольном $\Delta BC_1C$находим $CC_1 = C_1B^2 – BC^2 = R\ 2$. Следовательно, объем призмы равен $BC^2 \cdot C_1C = R^2 \cdot R\ 2 = R^3\ 2$.

Ответ: $R^3$ 2.

*Задача 3*. Найдите объем и площадь поверхности тела,полученного при вращении треугольника со сторонами 6 см, 25 см и 29 смвокруг прямой, проходящей через вершину меньшего угла треугольникапараллельно меньшей его стороне.

Ответ: 1,6π дм$^3$, 13,2π дм$^2$.

**Работа учеников группы Ана уроке**

1. Сколько граней, ребер и вершин имеет: а) прямоугольный параллелепипед; б) тетраэдр; в) октаэдр?

*Ответ*. Прямоугольный параллелепипед имеет 6 граней, 12 ребер и 8 вершин.Тетраэдр имеет: 4 грани, 6 ребер, 4 вершины. Октаэдр имеет: 8 граней, 12 ребер, 6 вершин.

2. Какие фигуры получаются в сечении треугольной пирамиды плоскостью?

*Ответ*: точка, отрезок, треугольник, четырехугольник.

3. Какие фигуры получаются в сечении куба плоскостью?

*Ответ*: точка, отрезок, треугольник, четырехугольник, пятиугольник, шестиугольник.

4. Может ли в сечении пирамиды плоскостью получиться, а) пятиугольник, б) шестиугольник?

*Ответ*: а) нет; б) нет.

5. Чему равно наибольшее число сторон многоугольника, полученного сечением многогранника с плоскостью?

*Ответ*: наибольшее число сторон многоугольника, полученного в сечении многогранника плоскостью, равно числу граней многогранника.

**Работаучеников группы В на уроке**

1) Докажите, что число вершин любой призмы четно, а число ребер кратно 3.

*Ответ*. В основании призмы лежит n-угольник. Он имеет $n$ сторон, которые являются ребрами призмы. В противоположном основании такой же n-угольник с точно таким же числом сторон.Помимо этого, все вершины одного основания соединены ребрами с соответствующими вершинами другого основания. Поскольку $n$ пар вершин соединены ребрами, то ребер (боковых) тоже n штук.Всего ребер у призмы $n + n + n = 3n$.Число $3n$ кратно 3. Следовательно число ребер любой призмы кратно 3.

2) Докажите, что площадь боковой поверхности прямой призмы (т. е. сумма площадей ее боковых граней) равна произведению периметра основания на боковое ребро.

*Ответ*.Площадью боковой поверхности призмы называется сумма площадей её боковых граней (обозначается $S_{бок}$). Теорема: О площади боковой поверхности прямой призмы. Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра её основания на высоту призмы.$S(_{бок})=P(_{осн})*H$, где $H$ – высота призмы.

3) *KABCD* – правильная четырехугольная пирамида. Точки *M* и *N* – середины ребер *KB* и *KC*. Найдите периметр сечения пирамиды плоскостью, параллельной грани *AKD* и проходящей через точки *M* и *N*, если сторона основания пирамиды 16 см, а высота пирамиды 4 см.

а) 24 см; б) 36 см; в) 32 см; г) 42 см.

*Ответ*: 36 см.

4) Основание пирамиды *KABCDEF* – правильный шестиугольник ABCDEF со стороной 18 см. Ребро BK перпендикулярно плоскости основания и равно 27 см. Найдите двугранный угол, образованный плоскостями боковой грани AKF и основания.

а) 30 С; б) 45 С; в) 60 С; г) arctg$\frac{1}{3}$

*Ответ*: 60 С.

**Работа учеников группы С на уроке**

1) Построить сечение (PQR) параллелепипеда. Все точки лежат на ребрах двух смежных граней.

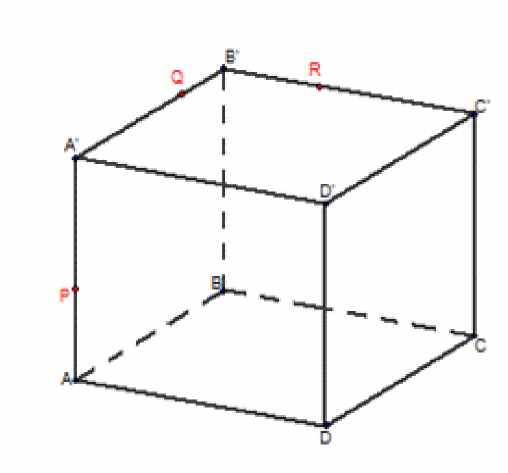


Рис. 7. PQR параллелепипед

Построение:

1) Строим PQ и QR;

2) PQ ∩ BA = F, PQ ∩ BB' = G;

3) GR ∩ CC' = H, GR ∩ BC = M;

4) FM ∩ AD = N, FM ∩ DC = K;

5) PQRHKN − искомое сечение.

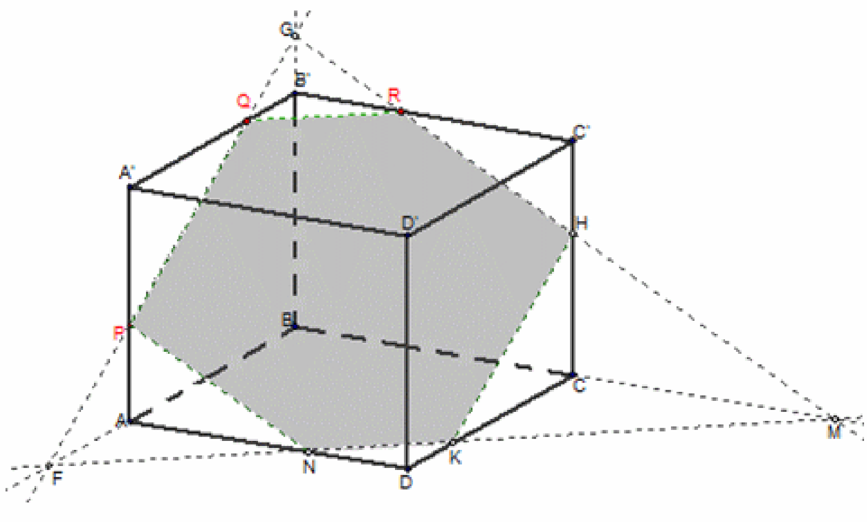


Рис. 8. Сечение PQR параллелепипеда

2) Построить (M, d) сечение призмы. Точка *M* принадлежит боковому ребру, прямая *d* лежит в плоскости нижнего основания.

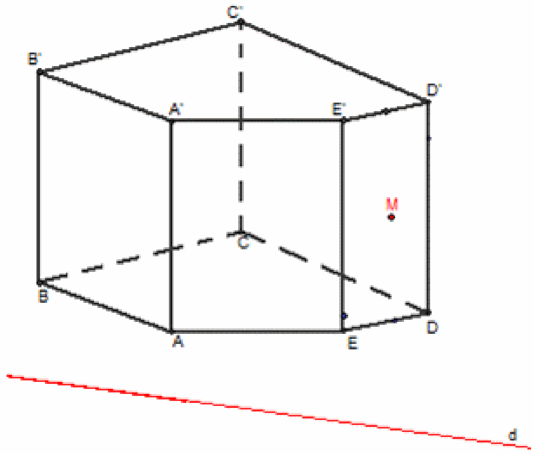


Рис. 9. M, d призма

Построение:

1) CB ∩ d = X, EA ∩ d = Y, DE ∩ d = Z, BA ∩ d = H;

2) MZ ∩ EE' = N, MZ ∩ DD' = T;

3) NY ∩ AA' = G;

4) GH ∩ BB' = P;

5) PX ∩ CC' = S;

6) PSTNG − искомое сечение.

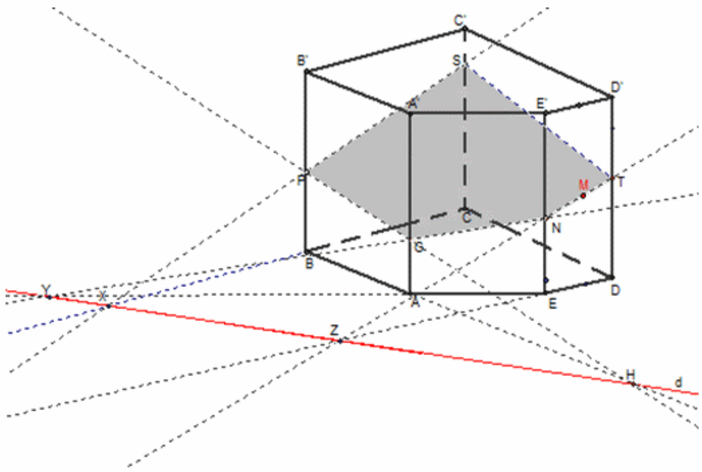


Рис. 10. Сечение M, d призмы

## Выводы по главе 2

В этой главе было продемонстрировано, что любой учебный материал можно дидактически переработать в разные уровни его логической сложности. Это дает возможность предоставить каждому учащемуся возможность для усвоения материала любого уровня сложности. Уровневое расположение материала позволяет использовать для его усвоения разные по степени сложности способыпознания, при этом совершенствуются математические способности школьников.В рамках настоящего исследования под разноуровневыми задачами необходимо понимать задачи, которые выстроены с учетом специфики типологических групп обучающихся, т. е. групп, объединенных одинаковым уровнем умений, знаний, способов деятельности по дисциплине (курсу, разделу, теме), а также уровнем их усвоения.Основываясь на изучении педагогических и психологических источников, учащиеся были разграничены на группы: элементарный уровень (А), базовый уровень (В), углубленный уровень (С).

Был представлен комплексдифференцированных заданий, которые направлены на реализацию уровневойдифференциации в процессе обучения стереометрии.

## Заключение

В соответствии с поставленными задачами, результатами настоящего исследования необходимо считать следующее:

1) В процессе изучения педагогических и психологических источников было раскрыто понятие дифференциации обучения. Помимо этого, определены и описаны три ключевых аспекта в понимании дифференциации, разделение обучающихся на группы, степень влияния уровневой дифференциации на развитие универсальных учебных действия и обозначены критерии дифференцирования.

2) Определена специфика уровневой дифференциации в ходе обучения математике.

3) Определены и рассмотрены значимые условия, выполнение которых необходимо для продуктивного осуществления уровневой дифференциации.

4) Были предложены и рассмотрены разноуровневые задачи в качестве средства реализации дифференцированного подхода на уроках математики.

5) С учетом обозначенных критериев был разработан комплекс дифференцированных заданий, которые направлены на реализацию уровневой дифференциации в процессе обучения математике.

Таким образом, поставленная цель исследования была достигнута,задачи исследования выполнены в полном объеме. Помимо этого, материалы настоящего исследования могут найти применение в практической работе педагогов.

Для реализации идеи дифференциации в обучениիматематике на практике необходима существенная трансформация всей методической системы. Также важным является созданиеразноуровневой программы, методического и учебного обеспечения, которые направлены на организацию дифференцирования учащихся с разными способностями и разным уровнем обучаемости.

Необходимо заключить, что дифференцированный подход в обучении – это важнейший принцип воспитания и обучения. Он означает действенное внимание к каждому ученику, его творческой индивидуальности в условиях классно- урочной системы.

В результате использования метода дифференциации на учебных занятиях повышается интерес к предмету, учебная мотивация и успеваемость; появляется уверенность в себе. Формируются и развиваются такие личностные качества как умение анализировать собственные успехи и неудачи, выявлять собственные возможности; критическое отношение к своим знаниям; умение видеть перспективы собственного роста, планировать свою дальнейшую учебную деятельность.

Между учителем и учащимися устанавливаются партнерские отношения, снижается психологическое напряжение учащихся на уроках. Повышается качество знаний и активность слабоуспевающих учащихся. Адекватной становится самооценка учащихся.

Успех является источником внутренних сил ребенка, рождающих энергию для преодоления трудностей, желания учиться. Ребенок испытывает уверенность в себе и внутреннее удовлетворение.

## Список используемых источников

1. Федеральный закон от 29.12.12 г. № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации» [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.consultant.ru/cons/CGI/online.cgi?req=doc;base=LAW;n=140174#04585440169410091 (дата обращения: 28.11.2020)

2. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования (утвержден приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 17 мая 2012 г. № 413) [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.consultant.ru/document/cons (дата обращения: 28.11.2020).

3. Распоряжение правительства России от 24 декабря 2013 г. № 2506-р «О концепции развития математического образования в РФ» [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.garant.ru/products/ipo/prime/doc/70452506/ (дата обращения: 28.11.2020)

4. Аввакумова, И. А., Дударева, Н. В. Формирование профессиональной готовности будущего учителя математики в условиях внедрения профессионального стандарта педагога // Педагогическое образование в России. − 2015. − № 7. − С. 159-164.

5. Аксенов, А. А. Теория обучения логическому поиску решения школьных математических задач:автореф. дис. ... докт. пед. наук: 13.00.02 / Аксенов Андрей Александрович; [Место защиты: Нижегор. гос. ун-т им. Н. И. Лобачевского]. − Нижний Новгород, 2010. − 43 с.

6. Александров, А. Д. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия 10-11 классы: учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубленный уровни. ФГОС / А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик. − М.: Просвещение, 2017. – 255 с.

7. Асмолов, А. Г., Бурменская, Г. В., Володарская, И. А. и др. Формирование универсальных учебных действий в основной школе: от

действия к мысли. Система заданий: пособие для учителя / под ред. А. Г. Асмолова. − М.: Просвещение, 2017. − 159 с.

8. Байдак, В. А. Теория и методика обучения математике: наука, учебная дисциплина: Монография / В. А. Байдак. − 2-е изд., стереотип. − М.: Флинта, 2011. – 264 с.

9. Бескин, Л. Н. Стереометрия: Пособие для учителей средней школы / Л. Н. Бескин. – 2-е изд., доп. − М.: Учпедгиз, 1971. − 416 с.

10. Боженкова, Л. И. Составление задач учащимися как средство достижения предметных и метапредметных результатов при обучении геометрии / Л. И. Боженкова // Наука и школа. − 2013. − № 5. − С. 103-107.

11. Выготский, Л. С. Вопросы детской психологии / Л. С. Выготский. − СПб.: Союз, 2016. – 199 с.

12. Гавришко, А. А. Изучение темы «Объемы геометрических тел» в общеобразовательной школе /А. А. Гавришко // Математика и современность: материалы Междунар. заочной науч.-практ. конф. (30 октября – 10 ноября, 2017 г.). – Луганск: Книга, 2018. – С. 132-134.

13. Глаголев, Н. А. Элементарная геометрия: Стереометрия / Н. А. Глаголев. – 4-е изд., стереотип. – М.: URSS, 2021. – 136 с.

14. Глейзер, Г. Д. Развитие пространственных представлений школьников при обучении геометрии / Г. Д. Глейзер. – М.: Педагогика, 1978. − 70 с.

15. Готман, Э. Г. Стереометрические задачи и методы их решения / Э. Г. Готман. – М.: МЦНМО, 2006. – 160 с.

16. Груденов, Я. И. Психолого-дидактические основы методики обучения математике / Я. И. Груденов. − М.: Педагогика, 1987. − 160 с.

17. Гусев, В. А. Теория и методика обучения математике: психолого-педагогические основы / В. А. Гусев. − М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014. – 457 с.

18. Далингер, В. А. Методика обучения математике. Поисково-исследовательская деятельность учащихся: учебник и практикум для

среднего проф. образования / В. А. Далингер. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Изд-во «Юрайт», 2020. – 460 с.

19. Дворянинов, С. В. Геометрические задачи с практическим содержанием / С. В. Дворянинов // Математика в школе. − 2013. – № 8. – С. 43-45.

20. Дорофеев, С. Н., Наземнова, Н. В. Деятельностный подход к обучению старшеклассников распознаванию геометрических образов // Азимут научных исследований: Педагогика и психология. – 2017. − № 2 (19). – С. 52-55.

21. Епишева, О. Б. Технология обучения математике на основе деятельностного подхода : Книга для учителя / О. Б. Епишева. − М. : Просвещение, 2003. – 223 с.

22. Зильберберг, Н. И. Урок математики: подготовка и проведение / Н. И. Зильберберг. − М.: Просвещение, 1996. − 176 с.

23. Иванова, И. Ю. Приемы дифференцированного обучения математике / И. Ю. Иванова // Начальная школа. − 2016. − № 5. − С. 33-36.

24. Капиносов, А. Н. Уровневая дифференциация при обучении математике / А. Н. Капиносов // Математика в школе. – 1990. − № 5. – С. 31-40.

25. Кашканова, Л. З. Дифференциация обучения как форма организации образовательного процесса / Л. З. Кашканова // Теория и практика образования в современном мире: материалы II междунар. науч. конф. (г. Санкт-Петербург, ноябрь 2012 г.). − СПб.: Реноме, 2012. − С. 132-136.

26. Квитко, Е. С. Формирование универсальных учебных действий при обучении математике // Бюллетень лаборатории математического естественнонаучного образования и информатизации: рецензируемый сб. науч. тр. Т. 1 / Моск. гор. пед. ун-т. образования. − М.: Научная кн., 2012. − С. 147-152.

27. Кузьмина, В. М. Дифференциация процесса обучения в условиях ФГОС II поколения: к постановке проблемы / В. М. Кузьмина // Электронный научный журнал «Педагогика и психология». – 2012. – № 4. – С. 10-17.

28. Лернер, И. Я. Дидактические основы методов обучения / И. Я. Лернер. − М.: Педагогика, 1981. − 184 с.

29. Майсеня, Л. И. Справочник по математике: основные понятия и формулы / Л. И. Майсеня. – 2-е изд., перераб. и доп. – Минск: Выш. шк., 2012. – 399 с.

30. Маскаева, А. М. Проектирование индивидуальных образовательных траекторий учащихся старших классов в условиях вариативного обучения математике: автореф. дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Маскаева Александра Михайловна; [Место защиты: Ярослав. гос. пед. ун-т им. К.Д. Ушинского]. − Ярославль, 2011. − 22 с.

31. Медведева, О. С. Психолого-педагогические основы обучения математике / О. С. Медведева. – М.: «БИНОМ. Лаборатория знаний», 2013. – 204 с.

32. Новые педагогические и информационные технологии: Учеб. пособие / Е. С. Полат [и др.]; под. ред. Е. С. Полат. – 3-е изд. − М.: Изд-во «Юрайт», 2020. − 392 с.

33. Осмоловская, И. М. Организация дифференцированного обучения в современной общеобразовательной школе / И. М. Осмоловская; Рос. акад. образования, Моск. психол.-соц. ин-т. − 2-е изд., перераб. и доп. − М. : [Изд-во Моск. психол.-соц. ин-та]; Воронеж : [МОДЭК], 2005. − 214 с.

34. Подаева, Н. Г. Обновление содержания школьного математического образования: социокультурный подход: монография / Н. Г. Подаева, М. В. Подаев. − СПб.: Лань, 2014. − 221 с.

35. Садовников, Н. В. Теоретические основы формирования математических понятий в школьном курсе / Н. В. Садовников // Итоги прошлого и проблемы настоящего. – 2015. − № 6 (28). – С. 123-126.

36. Свиридова, Е. М. Планирование индивидуальной траектории деятельности ученика в малой группе / Е. М. Свиридова // Муниципальное образование: инновации и эксперимент. − 2012. − № 1. − С. 26-32.

37. Селевко, Г. К. Современные образовательные технологии: Учеб. пособие / Г. К. Селевко. – М.: Народное образование, 1998. – 256 с.

38. Семенова, И. Н. Реализация дифференцированного подхода при изучении школьного курса математики в системе развивающего обучения : Учеб.-метод. пособие / И. А. Аввакумова, И. А. Потапова, Г. В. Семенова, А. В. Слепухин; Урал. гос. пед. ун-т ; Под ред. Х. Ж. Ганеева ; Отв. ред. И. Н. Семенова. − Екатеринбург :Б.и., 2003. – 119 с.

39. Сулейманова, А. В. Дифференцированное обучение на уроках математики в общеобразовательном классе средней школы / А. В. Сулейманова // Вестник Московского ун-та. – 2019. − № 1. – С. 89-100.

40. Терешин, Д. А. Профильное обучение стереометрии как основа подготовки учащихся старших классов к профессиональной математической деятельности / Д. А. Терешин // Труды МФТИ. – 2012. – Т. 4, № 4. – С. 177-182.

41. Унт, И. Э. Индивидуализация и дифференциация обучения/ И. Э. Унт. − М. : Педагогика, 1990. − 188, [3] с.

42. Утеева, Р. А. Групповая форма учебной деятельности учащихся на уроке математики в средней школе : Пособие для учителя / Р. А. Утеева; М-во общ. и проф. образования РФ. Тольят. фил. Сам. гос. пед. ун-та. − Тольятти, 1996. − 83 с.

43. Фирсов, В. В. Дифференциация обучения на основе обязательных результатов обучения / В. В. Фирсов. – М. : Наука, 1994. − 194 с.

44. Фридман, Л. М. Психолого-педагогические основы обучения математике в школе / Л. М. Фридман. − М.: Просвещение, 1983. − 160 с.

45. Элипханов, А-В. И., Гаджимурадов, М. А., Абасов, Ш. М. Развитие логической культуры учащихся при введении геометрических понятий // Успехи современной науки. – 2016. − № 12. – С. 102-106.